応用数学・中間試験

担当：緒方秀教 (e-mail) `ogata@im.uec.ac.jp`

出題：2013 年 6 月 18 日（火）2 限 (10:40–12:10)

第 1 問　つぎで定義される周期 2π の周期関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x) = |\sinh(ax)| = \left|\frac{\mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{-ax}}{2}\right| \quad (\,-\pi < x \le \pi,\ a \text{ は正の定数}\,)$$

1. $f(x)$ の複素フーリエ級数を求めよ．
2. 前問の結果を用いて，$f(x)$ の実フーリエ級数を求めよ．
3. $f(x)$ のフーリエ級数を用いて，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}\cosh(\pi a)}{n^2 + a^2}$$

を求めよ．

4. パーセバルの等式を用いて，級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1 + (-1)^{n-1}\cosh(\pi a)}{n^2 + a^2}\right\}^2$$

を求めよ．

1.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

（$f(x)$ は連続関数であることに注意）とおくと，

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sinh(ax)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \sinh(ax)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{\pi} \sinh(ax)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}n)x} - \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}n)x}\}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi a} - 1}{a - \mathrm{i}n} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi a} - 1}{a + \mathrm{i}n},$$

$$\int_{-\pi}^{0} \sinh(ax)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\{\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}n)x} - \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}n)x}\}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi a} - 1}{a - \mathrm{i}n} - \frac{1}{2}\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi a} - 1}{a + \mathrm{i}n}$$

により，

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}[\{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi a} - 1\} + \{(-1)^n\mathrm{e}^{-\pi a} - 1\}]\left(\frac{1}{a + \mathrm{i}n} + \frac{1}{a - \mathrm{i}n}\right) \\ &= \frac{a\{(-1)^n\cosh(\pi a) - 1\}}{\pi(n^2 + a^2)}. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{a}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\cosh(\pi a) - 1}{n^2 + a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

2. 前問の結果より，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi a}\{\cosh(\pi a) - 1\} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cosh(\pi a) - 1}{a^2 + n^2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}) \\ &= \frac{1}{\pi a}\{\cosh(\pi a) - 1\} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cosh(\pi a) - 1}{n^2 + a^2}\cos nx. \end{aligned} \tag{1}$$

3. 式 (1) に $x=0$ を代入して,

$$0 = \frac{1}{\pi a}\{\cosh(\pi a) - 1\} + \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cosh(\pi a) - 1}{a^2+n^2},$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}\cosh(\pi a)}{n^2+a^2} = \frac{1}{2a^2}\{\cosh(\pi a) - 1\}.$$

4. パーセバルの等式より

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2,$$

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_{-\pi}^{\pi}\sinh^2(ax)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi}\sinh^2(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{2ax} - 2 + \mathrm{e}^{-2ax})\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2a}\sinh(2\pi a) - \pi, \\
(\text{右辺}) &= \frac{2a^2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1+(-1)^{n-1}\cosh(\pi a)}{n^2+a^2}\right\}^2
\end{aligned}$$

により,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1+(-1)^{n-1}\cosh(\pi a)}{n^2+a^2}\right\}^2 = \frac{\pi}{2a^2}\left\{\frac{1}{2a}\sinh(2\pi a) - \pi\right\}.$$

第 2 問　符号関数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & (\ x > 0\ ) \\ -1 & (\ x < 0\ ) \end{cases}$$

の広義微分を求めよ.

任意のテスト関数 $g(x)$ に対し,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}' x\, g(x)\mathrm{d}x &= -\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn} x\, g'(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\infty}g'(x)\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{0}g'(x)\mathrm{d}x \\
&= 2g(0) = \int_{-\infty}^{\infty}2\delta(x)g(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

となるから

$$\operatorname{sgn}' x = 2\delta(x).$$

以上