応用数学・中間試験・解答

担当：緒方秀教 (e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

出題：2013 年 6 月 21 日（金）3 限 (13:00–14:30)

第 1 問　つぎで定義される周期 2π の周期関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x) = \sin(\alpha x) \quad (-\pi \leq x < \pi,\ \alpha \text{ は整数でない実定数}).$$

1. $f(x)$ の実フーリエ級数を求めよ．
2. 前問の結果を用いて，$f(x)$ の複素フーリエ級数を求めよ．
3. これまでの結果を用いて，次の等式を証明せよ．

$$\sec\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\left(= \frac{1}{\cos(\pi\alpha/2)}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}(2m+1)}{\alpha^2-(2m+1)^2}.$$

4. パーセバルの等式を用いて，級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(\alpha^2-n^2)^2}$$

を求めよ．

1. $f(x)$ は奇関数であるから，

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

とフーリエ級数展開される．

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(\alpha x)\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\cos(\alpha-n)x - \cos(\alpha+n)x\right\}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\sin(\alpha-n)x}{\alpha-n}\right]_0^{\pi} - \left[\frac{\sin(\alpha+n)x}{\alpha+n}\right]_0^{\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{(-1)^n\sin\pi\alpha}{\alpha-n} - \frac{(-1)^n\sin\pi\alpha}{\alpha+n}\right\} = \frac{2n(-1)^n\sin\pi\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)},
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f(x) \sim \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\sin(nx). \tag{1}$$

2. 1. の結果より

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{\sin(\pi\alpha)}{\mathrm{i}\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{\alpha^2-n^2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}) \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\mathrm{i}\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.
\end{aligned}$$

3. $f(x)$ は区分的に滑らかであるから，$f(x)$ が連続である $x = \pi/2$ に対し (1) において等号が成り立つ．よって

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

である．ここで

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^m & (\,n = 2m+1\ (\text{奇数}),\ m = 0, 1, 2, \dots) \\ 0 & (\,n = \text{偶数}\,) \end{cases}$$

を用いると，

$$\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}(2m+1)}{\alpha^2-(2m+1)^2}$$

を得るので，両辺を $\sin(\pi\alpha/2)$ で割って題意の等式を得る．

4. パーセバルの等式を 2. のフーリエ級数展開に適用すると，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(\alpha x)\mathrm{d}x = 2\pi\left|\frac{\sin(\pi\alpha)}{\mathrm{i}\pi}\right|^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\frac{n(-1)^n}{\alpha^2-n^2}\right|^2.$$

$$\text{左辺} = 2\int_0^{\pi}\sin^2(\alpha x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\{1-\cos(2\alpha x)\}\mathrm{d}x = \pi - \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\alpha},$$

$$\text{右辺} = \frac{2}{\pi}\sin^2(\pi\alpha)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{(\alpha^2-n^2)^2} = \frac{4}{\pi}\sin^2(\pi\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(\alpha^2-n^2)^2}$$

により，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(\alpha^2-n^2)^2} = \frac{\pi}{4\sin^2(\pi\alpha)}\left\{\pi - \frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\alpha}\right\}$$

を得る．

第 2 問　次の等式を証明せよ．

$$x^2\delta''(x) = 2\delta(x).$$

（ヒント）$g(x)$ を任意のテスト関数（$x \to \pm\infty$ で十分速く減衰する滑らかな関数）として，積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\delta''(x)g(x)\mathrm{d}x$$

を考える．

任意のテスト関数 $g(x)$ に対し，広義積分の定義より

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}x^2\delta''(x)g(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\{x^2g(x)\}''\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\{2g(x)+4xg'(x)+x^2g''(x)\}\mathrm{d}x \\ &= 2g(0) = \int_{-\infty}^{\infty}2\delta(x)g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

となるから，題意の等式が成り立つ．

以上