応用数学・期末試験・解答

担当：緒方秀教 (e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

出題：2013 年 8 月 6 日（火）2 限 (10:40–12:10)

第 1 問　つぎの関数 $f(x)$ を考える（a は正の定数）．

$$f(x) = \begin{cases} x & (\,-a < x < a\,) \\ 0 & (\,|x| > a\,). \end{cases}$$

1. $f(x)$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f](\omega)$ を求めよ．
2. 前問の結果を用いて，次の積分を求めよ．
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^2}(\sin\omega a - \omega a\cos\omega a)\sin\left(\frac{\omega a}{2}\right)\mathrm{d}\omega.$$
3. パーセバルの等式を用いて，次の積分を求めよ．
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^4}(\sin y - y\cos y)^2\mathrm{d}y.$$

1.

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{i}}{\omega}\int_{-a}^{a} x(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x})'\mathrm{d}x \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\omega}\left\{\left[x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right]_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\right\} = \frac{\mathrm{i}}{\omega}(a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega a} + a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega a}) - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\mathrm{i}a}{\omega}\cos\omega a + \frac{1}{\omega^2}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\right]_{-a}^{a} = \frac{2\mathrm{i}a}{\omega}\cos\omega a + \frac{1}{\omega^2}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega a}) \\
&= \frac{2\mathrm{i}a}{\omega}\cos\omega a - \frac{2\mathrm{i}}{\omega^2}\sin\omega a = \frac{2}{\mathrm{i}\omega^2}(\sin\omega a - \omega a\cos\omega a).
\end{aligned}$$

2. $f(x)$ は $x \neq \pm a$ で連続であるから，フーリエの積分定理により

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}[f](\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^2}(\sin\omega a - \omega a\cos\omega a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega \quad (\,x \neq \pm a\,).$$

$x = a/2$ を代入して，

$$\frac{a}{2} = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^2}(\sin\omega a - \omega a\cos\omega a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega a/2}\mathrm{d}\omega.$$

両辺の実部をとって，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^2}(\sin\omega a - \omega a\cos\omega a)\sin\left(\frac{\omega a}{2}\right)\mathrm{d}\omega &= \frac{a}{2}, \\
\therefore\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^2}(\sin\omega a - \omega a\cos\omega a)\sin\left(\frac{\omega a}{2}\right)\mathrm{d}\omega &= \frac{\pi a}{2}.
\end{aligned}$$

3. Parseval の等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathscr{F}[f](\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

において，

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x = \frac{2a^3}{3}, \\
\text{右辺} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{2}{\mathrm{i}\omega^2}(\sin\omega a - \omega a\cos\omega a)\right|^2\mathrm{d}\omega = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^4}(\sin\omega a - \omega a\cos\omega a)^2\mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

であるから，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega^4}(\sin\omega a - \omega a\cos\omega a)^2 \mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{3}a^3.$$

積分変数を $y = \omega a$ とおくと，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y^4}(\sin y - y\cos y)^2 \mathrm{d}y = \frac{\pi}{3}.$$

第 2 問　$\varphi(x)$ を次の積分方程式の解とする．

$$\int_0^x \varphi(\xi)\mathrm{e}^{x-\xi}\mathrm{d}\xi = x^2.$$

1. e^x, x^2 のラプラス変換を求めよ．
2. $\varphi(x)$ のラプラス変換 $\Phi(s) = \mathscr{L}[\varphi](s)$ を求めよ．
3. もとの積分方程式の解 $\varphi(x)$ を求めよ．

1.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\mathrm{e}^x](s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{(1-s)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{s-1}, \\
\mathscr{L}[x](s) &= \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = -\frac{1}{s}\int_0^\infty x\{\mathrm{e}^{-sx}\}'\mathrm{d}x = -\frac{1}{s}\left\{\left[x\mathrm{e}^{-sx}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{1}{s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \frac{1}{s^2}, \\
\mathscr{L}[x^2](s) &= \int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = -\frac{1}{s}\int_0^\infty x^2\{\mathrm{e}^{-sx}\}'\mathrm{d}x = -\frac{1}{s}\left\{\left[x^2\mathrm{e}^{-sx}\right]_0^\infty - 2\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{2}{s}\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \frac{2}{s^3}.
\end{aligned}$$

2. 題意の積分方程式はたたみこみを用いて

$$\varphi * \mathrm{e}^x = x^2$$

と表される．両辺のラプラス変換をとって，

$$\mathscr{L}[\varphi * \mathrm{e}^x](s) = \mathscr{L}[\varphi](s)\mathscr{L}[\mathrm{e}^x](s) = \mathscr{L}[x^2](x), \quad \Phi(s)\frac{1}{s-1} = \frac{2}{s^3},$$
$$\therefore \quad \Phi(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^3}.$$

3. 前問の結果の逆ラプラス変換をとって，

$$\varphi(x) = 2x - x^2.$$

以上