応用数学・期末試験・解答

担当：緒方秀教 (e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

出題：2013 年 8 月 9 日（金）3 限 (13:00–14:30)

第 1 問　つぎの関数 $f(x)$ を考える（a は正の定数）.

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-ax} & (\ x \geq 0\ ) \\ -\mathrm{e}^{ax} & (\ x < 0\ ) \end{cases}$$

1. $f(x)$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f](\omega)$ を求めよ.
2. 前問の結果を用いて，次の等式を証明せよ.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{a^2 + \omega^2} \mathrm{d}\omega = \begin{cases} \pi \mathrm{e}^{-ax} & (\ x > 0\ ) \\ -\pi \mathrm{e}^{ax} & (\ x < 0\ ). \end{cases}$$
3. パーセバルの等式を用いて，次の積分を求めよ.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{(a^2 + \omega^2)^2} \mathrm{d}\omega.$$

1.

$$\begin{aligned} \mathscr{F}[f](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\omega)x} \mathrm{d}x - \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}\omega)x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a + \mathrm{i}\omega} - \frac{1}{a - \mathrm{i}\omega} = -\frac{2\mathrm{i}\omega}{a^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

2. $f(x)$ は $x \neq 0$ で連続であるから、フーリエの積分定理により

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}[f](\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} \mathrm{d}\omega = \frac{1}{\mathrm{i}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}}{a^2 + \omega^2} \mathrm{d}\omega \quad (\ x \neq 0\ ).$$

実部をとって，

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{a^2 + \omega^2} \mathrm{d}\omega = \begin{cases} \mathrm{e}^{-ax} & (\ x > 0\ ) \\ -\mathrm{e}^{ax} & (\ x < 0\ ). \end{cases}$$

これより直ちに題意の等式を得る.

3. パーセバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}[f](\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$$

において，

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 2 \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2ax} \mathrm{d}x = \frac{1}{a}, \\ \text{右辺} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| -\frac{2\mathrm{i}\omega}{a^2 + \omega^2} \right|^2 \mathrm{d}\omega = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{(a^2 + \omega^2)^2} \mathrm{d}\omega, \\ \therefore \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{(a^2 + \omega^2)^2} \mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2a}. \end{aligned}$$

第 2 問　$f(x)$ を次の微分方程式の初期値問題の解とする（ω は正の定数）．

$$f''(x)+\omega^2 f(x)=\cos\omega x,\quad f(0)=f'(0)=0.$$

1. $\cos\omega x$, $\sin\omega x$ のラプラス変換を求めよ．
2. $f''(x)$ のラプラス変換を，$f(x)$ のラプラス変換 $F(s)=\mathscr{L}[f](s)$ を用いて表せ．
3. $F(s)=\mathscr{L}[f](s)$ を求めよ．
4. 解 $f(x)$ を求めよ．

1.

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\cos\omega x](s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\cos\omega x\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-\mathrm{i}\omega)x}\mathrm{d}x + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+\mathrm{i}\omega)x}\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\mathrm{i}\omega}+\frac{1}{s+\mathrm{i}\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \\
\mathscr{L}[\sin\omega x](s) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\sin\omega x\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2\mathrm{i}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left\{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-\mathrm{i}\omega)x}\mathrm{d}x - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s+\mathrm{i}\omega)x}\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{i}\omega}-\frac{1}{s+\mathrm{i}\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},
\end{aligned}$$

2. $f(0)=f'(0)=0$ に注意して，

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[f''](s) &= \int_0^\infty f''(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \Big[f'(x)\mathrm{e}^{-sx}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty f'(x)(\mathrm{e}^{-sx})'\mathrm{d}x \\
&= s\int_0^\infty f'(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = s\left\{\Big[f(x)\mathrm{e}^{-sx}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty f(x)(\mathrm{e}^{-sx})'\mathrm{d}x\right\} \\
&= s^2\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = s^2F(s).
\end{aligned}$$

3. 題意の微分方程式のラプラス変換をとって，

$$\mathscr{L}[f''+\omega^2 f](s)=\mathscr{L}[\cos\omega x](s),\quad (s^2+\omega^2)F(s)=\frac{s}{s^2+\omega^2},$$
$$\therefore\quad F(s)=\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

4. 前問の結果より

$$F(s)=\frac{1}{s^2+\omega^2}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

逆ラプラス変換をとると

$$f(x)=\frac{1}{\omega}\sin\omega x*\cos\omega x=\frac{1}{\omega}\int_0^x \sin\omega\xi\cos\omega(x-\xi)\mathrm{d}\xi,$$
$$\int_0^x \sin\omega\xi\cos\omega(x-\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2}\int_0^x\left[\sin\omega x+\sin\omega(2\xi-x)\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x\sin\omega x,$$
$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{2\omega}x\sin\omega x.$$

以上