解析学中間試験，解答と講評

（担当）緒方秀教　(e-mail)ogata@im.uec.ac.jp

2013 年 12 月 16 日（月）

第 1 問　次のべき級数の収束半径を求めよ．

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{n} nx^n \quad (2)\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}$$

$$(4)\quad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

$(\alpha,\beta,\gamma(\neq 0,-1,-2,\ldots)$ は定数$)$

各問の題意のべき級数を $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$，収束半径を R と記す．

$$(1)\quad \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1 \quad \therefore\quad R=1.$$

$$(2)\quad \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e} \quad \therefore\quad R=\mathrm{e}^{-1}.$$

$$(3)\quad \frac{1}{R^2}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=2 \quad \therefore\quad R=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$(4)\quad \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|(\alpha+n)(\beta+n)|}{|(n+1)(\gamma+n)|}=1 \quad \therefore\quad R=1.$$

∗ (4) のべき級数を Gauss の超幾何級数とよび，$F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ と記す．

第 2 問　次の関数の $x=0$ におけるテイラー展開を記せ．

(1)　e^x　(2)　$\cos x$　(3)　$\sin x$　(4)　$(1+x)^\alpha$　（α は定数）　(5)　$\log(1+x)$

$$(1)\quad \mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

$$(2)\quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

$$(3)\quad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

$$(4)\quad (1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$(5)\quad \log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

講評　今回の中間試験の平均点は 51.6 点（100 点満点）でした．80〜100 点くらいとれると思っていたので，残念な結果です．期末試験がこの調子では大半が不可になりますので，心して勉強して下さい．