応用数学・中間試験・解答

担当：緒方秀教 (e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

出題：2014 年 6 月 13 日（金）3 限 (13:00–14:00)

第 1 問　つぎで定義される周期 2π の周期関数 $f(x)$ を考える（a は $0 < a < \pi$ なる定数とする）．

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (\, -a \leqq x < a \,) \\ 0 & (\, -\pi \leqq x < -a \text{ または } a \leqq x < \pi \,) \end{cases}$$

1. $f(x)$ の複素フーリエ級数を求めよ．
2. 前問の結果を用いて，$f(x)$ の実フーリエ級数を求めよ．
3. $f(x)$ のフーリエ級数を用いて，級数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}$$
を求めよ．
4. パーセバルの等式を用いて，級数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2}$$
を求めよ．

1. $f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ とフーリエ級数展開されるとすると，
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \mathrm{d}x \quad (\, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \,)$$
である．$n \neq 0$ の場合，
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}na} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}na}}{2n\pi\mathrm{i}} = \frac{\sin na}{n\pi},$$
そして，
$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} 1 \mathrm{d}x = \frac{a}{\pi}$$
であるから，
$$f(x) \sim \frac{a}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n \neq 0} \frac{\sin na}{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

2.
$$f(x) \sim \frac{a}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}) = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} \cos nx. \tag{1}$$

3. $f(x)$ が $x = 0$ で連続であることに注意して，(1) 式で $x = 0$ とおくと，
$$1 = f(0) = \frac{a}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n}, \quad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin na}{n} = \frac{\pi - a}{2}.$$

4. パーセバルの等式
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

において，

$$（左辺）= \int_{-a}^{a} 1\mathrm{d}x = 2a, \quad （右辺）= 2\pi\left\{\left(\frac{a}{\pi}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin na}{n\pi}\right)^2\right\} = \frac{2a^2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2}$$

であるから，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 na}{n^2} = \frac{a(\pi - a)}{2}.$$

第 2 問　a, b を $-\infty < a < b < +\infty$ なる定数として，関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & （\ a \leqq x \leqq b\ ） \\ 0 & （その他） \end{cases}$$

の広い意味での微分を求めよ．

$g(x)$ を任意のテスト関数とすると，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)\mathrm{d}x &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)\mathrm{d}x = -\int_{a}^{b} g'(x)\mathrm{d}x \\ &= g(a) - g(b) = \int_{-\infty}^{\infty}\{\delta(x-a) - \delta(x-b)\}g(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

であるから，

$$f'(x) = \delta(x-a) - \delta(x-b).$$