応用数学・中間試験・解答

担当：緒方秀教 (e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

出題：2014 年 6 月 17 日（火）2 限 (10:40–11:40)

第 1 問　つぎで定義される周期 2π の周期関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x) = x + \pi \quad (\,-\pi \leqq x < \pi\,)$$

1. $f(x)$ の複素フーリエ級数を求めよ．
2. 前問の結果を用いて，$f(x)$ の実フーリエ級数を求めよ．
3. $f(x)$ のフーリエ級数を用いて，級数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$
を求めよ．
4. パーセバルの等式を用いて，級数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
を求めよ．

1. $f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ とおくと，$c_n = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x$.
$n \neq 0$ の場合，
$$c_n = \frac{-1}{2n\pi\mathrm{i}}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx})'\mathrm{d}x = \frac{-1}{2n\pi\mathrm{i}}\left\{\Big[(x+\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x\right\} = \frac{(-1)^{n-1}}{\mathrm{i}n},$$
$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)^2\mathrm{d}x = \pi$$
であるから，
$$f(x) \sim \pi + \sum_{n\neq 0}\frac{(-1)^{n-1}}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

2. 前問の結果を用いて，
$$f(x) \sim \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\mathrm{i}n}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx.$$

3. $f(x)$ が $x = \pi/2$ で連続であることに注意して，前問の結果に $x = \pi/2$ を代入すると，
$$\frac{3\pi}{2} = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2} = \pi + 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1},$$
$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{\pi}{4}.$$

4. パーセバルの等式
$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\mathrm{d}x = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

において，

$$\text{左辺} = \int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)^2 \mathrm{d}x = \frac{8\pi^3}{3}, \quad \text{右辺} = 2\pi \left\{ \pi + \sum_{n \neq 0} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{\mathrm{i}n} \right|^2 \right\},$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

第 2 問　次の関数 $f(x)$ の広い意味での微分を求めよ．

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (\, x < 0 \,) \\ 1 & (\, 0 \leqq x < 1 \,) \\ 2 & (\, x \geqq 1 \,). \end{cases}$$

任意のテスト関数 $g(x)$ に対し，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) g(x) \mathrm{d}x &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g' \mathrm{d}x = -\int_0^1 g'(x) \mathrm{d}x - 2\int_1^{\infty} g'(x) \mathrm{d}x \\ &= g(0) + g(1) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\delta(x) + \delta(x-1)\}\, g(x) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

が成り立つから，

$$f'(x) = \delta(x) + \delta(x-1).$$