応用数学・期末試験・解答

担当：緒方秀教 (e-mail) `ogata@im.uec.ac.jp`

出題：2014 年 7 月 25 日（金）3 限 (13:00–14:00)

第 1 問　　つぎで定義される関数 $f(x)$ を考える（a は正の定数とする）.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (\, 0 < x < a \,) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

1. $f(x)$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f](\omega)$ を求めよ.
2. 前問の結果を用いて，次の等式が成立することを示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega a/2)}{\omega} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-a/2)} \mathrm{d}\omega = \begin{cases} \pi & (\, 0 < x < a \,) \\ \pi/2 & (\, x = 0 \text{ または } a \,) \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

3. パーセバルの等式を用いて，積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(\omega a/2)}{\omega} \right\}^2 \mathrm{d}\omega.$$

を求めよ.

1.

$$\mathscr{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = \int_0^a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega a}}{\mathrm{i}\omega} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega a/2}\frac{\sin(\omega a/2)}{\omega}.$$

2. フーリエの積分定理

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}[f](\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega$$

に前問の結果を代入すれば,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega a/2)}{\omega} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-a/2)} \mathrm{d}\omega = \begin{cases} 1 & (\, 0 < x < a \,) \\ 1/2 & (\, x = 0 \text{ または } a \,) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となり，題意の等式を得る.

3. パーセバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}[f](\omega)|^2 \mathrm{d}x$$

において,

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= a, \\ \text{右辺} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2\frac{\sin(\omega a/2)}{\omega} \right\}^2 \mathrm{d}\omega = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(\omega a/2)}{\omega} \right\}^2 \mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(\omega a/2)}{\omega} \right\}^2 \mathrm{d}\omega = a, \quad \therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sin(\omega a/2)}{\omega} \right\}^2 \mathrm{d}\omega = \frac{\pi a}{2}.$$

第 2 問　関数 $f(x)$ に対する次の常微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解く（ω は正の定数）．

$$f''(x) + \omega^2 f(x) = \cos\omega x, \quad f(0) = f'(0) = 0.$$

1. $\cos\omega x$, $\sin\omega x$ のラプラス変換を求めよ．
2. $f'(x)$, $f''(x)$ のラプラス変換を，$f(x)$ のラプラス変換 $F(s) = \mathscr{L}[f](s)$ を用いて表せ．
3. $F(s)$ を求めよ．
4. $f(x)$ を求めよ．

1.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\cos\omega x](s) &= \int_0^\infty \cos\omega x\,\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{i}\omega)x} + \mathrm{e}^{-(s+\mathrm{i}\omega)x}\right\}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{s+\mathrm{i}\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \\ \mathscr{L}[\sin\omega x](s) &= \int_0^\infty \sin\omega x\,\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^\infty \left\{\mathrm{e}^{-(s-\mathrm{i}\omega)x} - \mathrm{e}^{-(s+\mathrm{i}\omega)x}\right\}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{s-\mathrm{i}\omega} - \frac{1}{s+\mathrm{i}\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}.\end{aligned}$$

2. $f(x)$ に対する初期条件に注意すると，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f'](s) &= \int_0^\infty f'(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \Big[f(x)\mathrm{e}^{-sx}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty f(x)(\mathrm{e}^{-sx})'\mathrm{d}x \\ &= s\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = sF(s), \\ \mathscr{L}[f''](s) &= \int_0^\infty f''(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = \Big[f'(x)\mathrm{e}^{-sx}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty f'(x)(\mathrm{e}^{-sx})'\mathrm{d}x \\ &= s\int_0^\infty f'(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = s\left\{\Big[f(x)\mathrm{e}^{-sx}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty f(x)(\mathrm{e}^{-sx})'\right\}\mathrm{d}x \\ &= s^2\int_0^\infty f(x)\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x = s^2F(s).\end{aligned}$$

3. 題意の微分方程式の両辺のラプラス変換をとると，

$$(s^2+\omega^2)F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad \therefore \quad F(s) = \frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}.$$

4. 前問の結果より，

$$F(s) = \frac{1}{\omega}\mathscr{L}[\sin\omega x](s)\cdot\mathscr{L}[\cos\omega x](s)$$

であるから，

$$f(x) = \frac{1}{\omega}\sin\omega x * \cos\omega x.$$

たたみこみを計算すると，

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\omega}\int_0^x \sin\omega\xi\ \cos\omega(x-\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\omega}\int_0^x \{\sin\omega x - \sin\omega(2\xi - x)\}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2\omega}\left\{x\sin\omega x - \frac{1}{2\omega}\Big[\cos\omega(2\xi-x)\Big]_0^x\right\} = \frac{1}{2\omega}x\sin\omega x.\end{aligned}$$