応用数学・期末試験・解答

担当：緒方秀教 (e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

出題：2014 年 7 月 29 日（火）2 限 (10:40–11:40)

第 1 問　つぎで定義される関数 $f(x)$ を考える（a は正の定数とする）.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (\ 0 < x < a\ ) \\ -1 & (\ -a < x < 0\ ) \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

1. $f(x)$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f](\omega)$ を求めよ.
2. 前問の結果を用いて，次の等式が成立することを示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2\left(\frac{\omega a}{2}\right) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega \mathrm{x}}}{\omega} \mathrm{d}\omega = \begin{cases} \mathrm{i}\pi/2 & (\ 0 < x < a\ ) \\ -\mathrm{i}\pi/2 & (\ -a < x < 0\ ) \\ \mathrm{i}\pi/4 & (\ x = a\ ) \\ -\mathrm{i}\pi/4 & (\ x = -a\ ) \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

3. パーセバルの等式を用いて，積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin^4\left(\frac{\omega a}{2}\right) \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2}$$

を求めよ.

1.

$$\mathscr{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x = \int_0^a \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x - \int_{-a}^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega a}}{\mathrm{i}\omega} + \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega a}}{\mathrm{i}\omega} = \frac{2-2\cos\omega a}{\mathrm{i}\omega} = \frac{4}{\mathrm{i}\omega}\sin^2\frac{\omega a}{2}.$$

2. フーリエの積分公式

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}[f](\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$

に前問の結果を代入すれば直ちに得られる.

3. パーセバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}[f](\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

にこれまで得られた結果を代入して，

$$2a = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{4}{\mathrm{i}\omega}\sin^2\left(\frac{\omega a}{2}\right)\right|^2 \mathrm{d}\omega = \frac{8}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sin^4\left(\frac{\omega a}{2}\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2},$$
$$\therefore\quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin^4\left(\frac{\omega a}{2}\right)\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2} = \frac{\pi a}{4}.$$

第 2 問　関数 $f(x)$ に対する次の常微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解く（$\alpha(>0), A, B$ は定数）.

$$f''(x) - 2\alpha f'(x) + \alpha^2 f(x) = 0, \quad f(0) = A, \quad f'(0) = B.$$

1. $\mathrm{e}^{\alpha x}$, $x\mathrm{e}^{\alpha x}$ のラプラス変換を求めよ.
2. $f'(x)$, $f''(x)$ のラプラス変換を，$f(x)$ のラプラス変換 $F(s) = \mathscr{L}[f](s)$ および A, B を用いて表せ.
3. $F(s)$ を求めよ.
4. $f(x)$ を求めよ.

1.
$$\mathscr{L}[\mathrm{e}^{\alpha x}](s) = \frac{1}{s-\alpha}, \quad \mathscr{L} x\mathrm{e}^{\alpha x}(s) = \frac{1}{(s-\alpha)^2}.$$

2.
$$\mathscr{L}[f'](s) = -A + sF(s), \quad \mathscr{L}[f''](s) = -As - B + s^2 F(s).$$

3. 題意の微分方程式のラプラス変換をとると，

$$(s^2 - 2\alpha s + \alpha^2)F(s) - As - B + 2\alpha A = 0,$$
$$F(s) = \frac{As + 2\alpha A + B}{(s-\alpha)^2} = \frac{A}{(s-\alpha)} + \frac{-\alpha A + B}{(s-\alpha)^2},$$

4.
$$f(x) = A\mathrm{e}^{\alpha x} + (-\alpha A + B)x\mathrm{e}^{\alpha x}.$$