解析学・中間試験・解答

（担当）緒方秀教　(e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

2014 年 12 月 22 日（月）10:40〜11:40

第 1 問　次の関数の $x=0$ における Taylor（テイラー）級数展開を記せ（この問題のみ，答だけを記すこと）．

(1) e^x　(2) $\cos x$　(3) $\sin x$　(4) $(1+x)^\alpha$（α は実数定数）　(5) $\log(1+x)$

$$(1)\ \mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad (2)\ \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\quad (3)\ \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$(4)\ (1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots.$$

$$(5)\ \log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

第 2 問　次のべき級数の収束半径を求めよ．

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$$

$$(4)\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

（超幾何関数，$\alpha,\beta,\gamma(\neq 0,-1,-2,\cdots)$ は定数）

$$(5)\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

（合流型超幾何関数，$\alpha,\gamma(\neq 0,-1,-2,\cdots)$ は定数）

以下，収束半径を R と記す.

(1). $c_n=1/n$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n^{-1}}=1.\quad \therefore\ R=1.$$

(2). $c_n=n/(n+1)$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n^{-1})^2}{1+2n^{-1}}=1.\quad \therefore\ R=1.$$

(3). $c_n=(1-1/n)^{n^2}$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}.\quad \therefore\ R=\mathrm{e}.$$

(4). $c_n = \dfrac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+\alpha n^{-1})(1+\beta n^{-1})}{(1+n^{-1})(1+\gamma n^{-1})} = 1. \quad \therefore\ R = 1.$$

(5). $c_n = \dfrac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha+n}{(n+1)(\gamma+n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\alpha n^{-1}}{(n+1)(1+\gamma n^{-1})} = 0. \quad \therefore\ R = \infty.$$