解析学・期末試験・解答

（担当）緒方秀教 (e-mail)ogata@im.uec.ac.jp

2015 年 2 月 16 日（月）実施

第 1 問

1. $(1+x)^\alpha$（α は定数）の $x=0$ におけるテイラー級数を示せ．
2. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ の $x=0$ におけるテイラー級数を求めよ．ただし，次の記号を使ってよい．

$$(2n)!! = 2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2, \quad (2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1 \quad (\,n=1,2,\ldots\,),$$
$$0!! = (-1)!! = 1.$$

3. $\arcsin x = \sin^{-1} x = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$ を用いて，$\arcsin x$ の $x=0$ におけるテイラー級数を求めよ．

1.
$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (\,n=1,2,\ldots\,).$$

2. 前問の答えより
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} x^{2n}.$$

ここで，
$$\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1/2)(-3/2)\cdots(1-2n)/2}{n!} = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

であるから，
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}.$$

3. 前問のべき級数を項別積分して，
$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} x^{2n+1}.$$

第 2 問　次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$(1)\quad y' = y(1-y), \quad (2)\quad y'' + 6y' + 5y = 0, \quad (3)\quad y'' + 4y' + 4y = 0,$$
$$(4)\quad y'' + 3y' + 2y = x\mathrm{e}^x, \quad (5)\quad y'' + y = \sin x.$$

1. まず，題意の微分方程式は解 $y \equiv 0, 1$ を持つ．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(1-y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{y(1-y)} = \mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y(1-y)} = \int \mathrm{d}x,$$

$$\text{左辺} = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) \mathrm{d}y = \log|y| - \log|1-y| + \text{const.} = \log\left|\frac{y}{1-y}\right| + \text{const.}$$

により，

$$\log\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + c \quad (c\ \text{は定数}), \quad y = \frac{C\mathrm{e}^x}{1+C\mathrm{e}^x} \quad (\, C = \mathrm{e}^c \neq 0\,).$$

解 $y \equiv 1$ は上の式で $C = 0$ と置いた場合に相当する．

$$\text{（答）} \quad y = \frac{C\mathrm{e}^x}{1+C\mathrm{e}^x}\ (\, C\ :\ \text{const.}\,), \quad y = 1.$$

2. $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-5x}$ (C_1, C_2 : const.).

3. $y = \mathrm{e}^{-2x}(C_0 + C_1 x)$ (C_0, C_1 : const.).

4. 同次形 $z'' + 3z' + 2z = 0$ の一般解は $z = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}$ (C_1, C_2 : const.)．特解を $y = u(x)\mathrm{e}^x$ の形で求める．

$$y' = (u' + u)\mathrm{e}^x, \quad y' = (u'' + 2u' + u)\mathrm{e}^x,$$
$$y'' + 3y' + 2y = (u'' + 5u' + 5u)\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x, \quad u'' + 5u' + 6u = x.$$

この $u(x)$ についての微分方程式は $u(x) =$（1 次関数）の形の解を持つ．$u(x) = ax + b$ とおくと，

$$5a + 6(ax+b) = 6ax + 5a + 6b = x, \quad \therefore\ a = \frac{1}{6}, \quad b = -\frac{5}{36}.$$

よって，特解 $y = \dfrac{1}{6}\left(x - \dfrac{5}{6}\right)\mathrm{e}^x$ を得る．

$$\text{（答）} \quad y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{6}\left(x - \frac{5}{6}\right)\mathrm{e}^x \quad (\, C_1, C_2\ :\ \text{const.}\,).$$

5. $y'' + y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ の解の虚部をとればよい．

同次形 $z'' + z = 0$ の一般解は，$z = C_1\cos x + C_2\sin x$ (C_1, C_2 : const.). 特解を $y = u(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ の形で求める．

$$y' = (u' + \mathrm{i}u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \quad y'' = (u'' + 2\mathrm{i}u' - u)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x},$$
$$y'' + y = (u'' + 2\mathrm{i}u')\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}, \quad u'' + 2\mathrm{i}u' = 1.$$

この $u(x)$ についての微分方程式は解 $u(x) = -\dfrac{\mathrm{i}x}{2}$ をもつ．よって，特解 $y = -\dfrac{\mathrm{i}x}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ が得られた．以上より一般解は，

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{\mathrm{i}x}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \quad (\, C_1, C_2\ :\ \text{const.}\,).$$

虚部をとって

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x}{2}\sin x \quad (\, C_1, C_2\ :\ \text{const.}\,).$$