応用数学（I1 クラス）・中間試験・解答

（担当）緒方秀教 (e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

2015 年 6 月 23 日（火）10:50〜11:50（60 分）

第 1 問　$f(x)$ を次で定義する周期 2π の周期関数とする．

$$f(x) = x^2 \quad (\,-\pi \leqq x < \pi\,)$$

1. $f(x)$ の複素フーリエ級数を求めよ．
2. $f(x)$ の実フーリエ級数を求めよ．
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の値を求めよ．
4. パーセバルの等式を用いて $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ の値を求めよ．

1. $f(x)$ の複素フーリエ級数を $f(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ とおく（$f(x)$ は連続関数であるから等号が成立する）．

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x$$

である．$n \neq 0$ の場合，部分積分により

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2n\pi\mathrm{i}}\int_{-\pi}^{\pi} x^2(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx})'\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2n\pi\mathrm{i}}\left\{\Big[x^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(x^2)'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{1}{n\pi\mathrm{i}}\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx})'\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n^2\pi}\left\{\Big[x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(x)'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{2(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^n}{n^2},
\end{aligned}$$

$n = 0$ の場合，

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3}.$$

$$\therefore\quad f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n\neq 0}\frac{(-1)^n}{n^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}. \tag{1}$$

2. 前問の結果から，

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

3. 前問の等式に $x=\pi$ を代入して，

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \quad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. パーセバルの等式

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$$

において，

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}x^4\mathrm{d}x = \frac{2\pi^5}{5},\\
&2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = 2\pi\left\{\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n\neq 0}\left|\frac{2(-1)^n}{n^2}\right|^2\right\} = 2\pi\left(\frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\right),\\
&\qquad\qquad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.
\end{aligned}$$

第 2 問　$f(x)$ を次で定義する周期 2π の周期関数とする．

$$f(x) = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \quad (\,-\pi \leqq x < \pi\,).$$

1. $f(x)$ の複素フーリエ級数を求めよ．
2. $x\sin x, x\cos x$ ($-\pi \leqq x < \pi$) の実フーリエ級数を求めよ．

1. $f(x)$ の複素フーリエ級数を $f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ とおく．

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)x}\mathrm{d}x$$

である．$n\neq 1$ の場合，部分積分により，

$$\begin{aligned}
c_n &= -\frac{1}{2(n-1)\pi\mathrm{i}}\int_{-\pi}^{\pi}x\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)x}\}'\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{2(n-1)\pi\mathrm{i}}\left\{\left[x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)x}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)x}\mathrm{d}x\right\} = \frac{\mathrm{i}(-1)^{n-1}}{n-1}.
\end{aligned}$$

$n=1$ の場合，

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\mathrm{d}x = 0.$$

$$\therefore \quad f(x) \sim \mathrm{i}\sum_{n\neq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

2. 前問の結果より，

$$
\begin{aligned}
f(x) &\sim \mathrm{i}\left\{1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right\}\\
&=\mathrm{i}\left\{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{n-1}-\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{n+1}\right)\right\}\\
&=\mathrm{i}\left\{1-\frac{1}{2}(\cos x-\mathrm{i}\sin x)+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx+\mathrm{i}n\sin nx}{n^2-1}\right\}.
\end{aligned}
$$

両辺の虚部をとって，

$$
x\sin x\sim 1-\frac{\cos x}{2}+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-1}\cos nx \quad (\,-\pi\leqq x<\pi\,),
$$

実部をとって，

$$
x\cos x\sim -\frac{1}{2}\sin x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{n^2-1}\sin nx \quad (\,-\pi\leqq x<\pi\,).
$$