応用数学（I1 クラス）・期末試験・解答

（担当）緒方秀教 (e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

2015 年 8 月 4 日（火）10:50〜11:50（60 分）

第 1 問　ある与えられた関数 $f(x)$ に対し，関数 $F(x)$ を次で定義する．

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2k\pi).$$

$F(x)$ は周期 2π の周期関数である．

1. $F(x)$ を $F(x) \sim \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ とフーリエ級数展開したとき，フーリエ級数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x$$

と表されることを示せ（積分と無限和の順序は交換可能であるとしてよい）．

2. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ の場合について $F(x)$ のフーリエ級数展開を求めよ．ただし，次の公式を用いてよい．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mathrm{i}c)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \quad (c \text{ は実数}).$$

1.

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+2k\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+2k\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+2k\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(x+2k\pi)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

2. 前問の結果を用いて，

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-n^2/4}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(x+\mathrm{i}n/2)^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-n^2/4},$$

$$\therefore \quad F(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2/4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

第 2 問　次の関数を考える．

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & (\ |x|\leqq 1\ )\\ 0 & (\ |x|>1\ )\end{cases}$$

1. $f(x)$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f](k)$ を求めよ．
2. 1. の結果を用いて，次の積分を x を用いて表せ．
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\sin(k/2)}{k}\right\}^2\cos kx\,\mathrm{d}k.$$
3. パーセバルの等式を用いて，次の積分を計算せよ．
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^4}\sin^4\left(\frac{k}{2}\right)\mathrm{d}k.$$

1.
$$\mathscr{F}[f](k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}(1+x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x.$$

$k\neq 0$ の場合，

$$\begin{aligned}\int_0^1(1-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x&=-\frac{1}{\mathrm{i}k}\int_0^1(1-x)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})'\mathrm{d}x=-\frac{1}{\mathrm{i}k}\left\{\Big[(1-x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\Big]_0^1+\int_0^1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\right\}\\&=-\frac{\mathrm{i}}{k}+\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}}{k^2},\\ \int_{-1}^{0}(1+x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x&=-\frac{1}{\mathrm{i}k}\int_{-1}^0(1+x)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx})'\mathrm{d}x=-\frac{1}{\mathrm{i}k}\left\{\Big[(1+x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\Big]_{-1}^0-\int_{-1}^0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\right\}\\&=\frac{\mathrm{i}}{k}+\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}}{k^2},\\ \therefore\quad\mathscr{F}[f](k)&=\frac{2-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k}}{k^2}=\frac{2}{k^2}(1-\cos k)=\frac{4}{k^2}\sin^2\frac{k}{2}\quad(\ k\neq 0\ ).\end{aligned}$$

$k=0$ の場合，

$$\mathscr{F}[f](0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=1.$$

$$\therefore\quad\mathscr{F}[f](k)=\begin{cases}\dfrac{4}{k^2}\sin^2\dfrac{k}{2}, & k\neq 0\\ 1 & k=0.\end{cases}$$

2. $f(x)$ は連続関数であるから，

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}[f](x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x,$$

両辺の実部を取って，

$$\therefore\quad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sin^2\frac{k}{2}\cos kx\,\mathrm{d}k=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}(1-|x|), & (\ |x|\leq 0\ )\\ 0 & (\ |x|>0\ ).\end{cases}$$

3. パーセバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}[f](k)|^2 \mathrm{d}k$$

より，

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4^2}{k^2} \sin^4 \frac{k}{2} \mathrm{d}k = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (1-|x|)^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^4} \sin^4 \frac{k}{2} \mathrm{d}k = \frac{\pi}{12}.$$

第 3 問　次の $f(x)$ についての積分方程式を考える．

$$f(x) + \int_0^x \sin(x-y) f(y) \mathrm{d}y = \cos x.$$

1. $\cos \omega x$, $\sin \omega x$（ω は実数定数）のラプラス変換を求めよ．
2. $f(x)$ のラプラス変換 $F(s) = \mathscr{L}[f](s)$ を求めよ．
3. $f(x)$ を求めよ．

1. $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega x}](s) = \displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(s - \mathrm{i}\omega)x} \mathrm{d}x = \frac{1}{s \pm \mathrm{i}\omega}$ より，

$$\mathscr{L}[\sin \omega x](s) = \mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2\mathrm{i}}\right] = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\frac{1}{s - \mathrm{i}\omega} - \frac{1}{s + \mathrm{i}\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2},$$

$$\mathscr{L}[\cos \omega x](s) = \mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2}\right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - \mathrm{i}\omega} + \frac{1}{s + \mathrm{i}\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

2. もとの積分方程式のラプラス変換を取ると，

$$F(s) + \frac{1}{s^2+1} F(s) = \frac{s^2+2}{s^2+1} F(s) = \frac{s}{s^2+1}, \quad \therefore \quad F(s) = \frac{s}{\omega^2 + 2}.$$

3. 1. の結果を用いて，$f(x) = \cos(\sqrt{2}x)$.