

解析学・講義資料 — 実数列の極限 —

(担当) 緒方秀教 (e-mail)ogata@im.uec.ac.jp

2015年10月5日(月)

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$  ( $a$  は任意の正定数) となること.  
電卓に好きな数を入れて “ $\sqrt{\quad}$ ” キーを何度も押し続けると, 1 に近づく.
2. 実数列  $\{a_n\}$  について  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  であるとき,  $b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ) となること.

数列

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (\rightarrow e = 2.718\dots, \quad n \rightarrow \infty)$$

について確かめた. 結果は以下のとおり.

```
#
# convergence of a(n) 1 + 1/1! + 1/2! + ... + 1/n!
#
# lim a(n) = e = 2.718281828459045e+000
#
# n          a(n)          |a(n)-e|/e
#-----
1 2.0000000000000000e+000 2.642e-001
2 2.5000000000000000e+000 8.030e-002
3 2.6666666666666667e+000 1.899e-002
4 2.7083333333333333e+000 3.660e-003
5 2.7166666666666666e+000 5.942e-004
6 2.7180555555555555e+000 8.324e-005
7 2.718253968253968e+000 1.025e-005
8 2.718278769841270e+000 1.125e-006
9 2.718281525573192e+000 1.114e-007
10 2.718281801146385e+000 1.005e-008
11 2.718281826198493e+000 8.316e-010
12 2.718281828286169e+000 6.360e-011
13 2.718281828446759e+000 4.520e-012
14 2.718281828458230e+000 2.998e-013
15 2.718281828458995e+000 1.846e-014
16 2.718281828459043e+000 8.169e-016
17 2.718281828459046e+000 1.634e-016
18 2.718281828459046e+000 1.634e-016
19 2.718281828459046e+000 1.634e-016
20 2.718281828459046e+000 1.634e-016
```

```

#
# convergence of b(n) = (a(1) + ... + a(n))/n
#
# n          b(n)          |b(n)-e|/e
#-----
  1 2.0000000000000000e+000 2.642e-001
101 2.708380838360040e+000 3.642e-003
201 2.713306704080940e+000 1.830e-003
301 2.714959569322820e+000 1.222e-003
401 2.715788062872996e+000 9.174e-004
501 2.716285820475015e+000 7.343e-004
601 2.716617934948242e+000 6.121e-004
701 2.716855294935528e+000 5.248e-004
801 2.717033389008384e+000 4.593e-004
901 2.717171950545646e+000 4.083e-004

```

$\{a_n\}$  に比べると  $\{b_n\}$  の収束はかなり遅いが、それでも  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$  に収束している様子がわかる。