

数値計算・講義資料

(担当) 緒方秀教 (e-mail)ogata@im.uec.ac.jp

2015年10月6日(火)

1. 積分に対する台形則

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}f(a) + h \sum_{k=1}^{N-1} f(kh) + \frac{h}{2}f(b), \quad h = \frac{b-a}{N}$$

に対する丸め誤差の累積. 積分

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0.785398163397448\dots$$

を台形則で倍精度計算し, その相対誤差を調べた. 結果を下に記す.

I(exact) = 7.853981633974483e-001				
N	h	I(trapezoidal rule)	error	log10(error)
2	5.00000e-001	7.750000000000000e-001	1.324e-002	-1.878e+000
4	2.50000e-001	7.827941176470589e-001	3.316e-003	-2.479e+000
8	1.25000e-001	7.847471236227722e-001	8.289e-004	-3.081e+000
16	6.25000e-002	7.852354030103472e-001	2.072e-004	-3.684e+000
32	3.12500e-002	7.853574732937438e-001	5.181e-005	-4.286e+000
64	1.56250e-002	7.853879908714134e-001	1.295e-005	-4.888e+000
128	7.81250e-003	7.853956202659381e-001	3.238e-006	-5.490e+000
256	3.90625e-003	7.853975276145704e-001	8.095e-007	-6.092e+000
512	1.95313e-003	7.853980044517305e-001	2.024e-007	-6.694e+000
1024	9.76563e-004	7.853981236610180e-001	5.059e-008	-7.296e+000
2048	4.88281e-004	7.853981534633400e-001	1.265e-008	-7.898e+000
4096	2.44141e-004	7.853981609139211e-001	3.162e-009	-8.500e+000
8192	1.22070e-004	7.853981627765683e-001	7.905e-010	-9.102e+000
16384	6.10352e-005	7.853981632422254e-001	1.976e-010	-9.704e+000
32768	3.05176e-005	7.853981633586421e-001	4.941e-011	-1.031e+001
65536	1.52588e-005	7.853981633877433e-001	1.236e-011	-1.091e+001
131072	7.62939e-006	7.853981633950301e-001	3.079e-012	-1.151e+001
262144	3.81470e-006	7.853981633968494e-001	7.625e-013	-1.212e+001
524288	1.90735e-006	7.853981633972924e-001	1.985e-013	-1.270e+001
1048576	9.53674e-007	7.853981633974174e-001	3.930e-014	-1.341e+001
2097152	4.76837e-007	7.853981633974280e-001	2.587e-014	-1.359e+001
4194304	2.38419e-007	7.853981633974507e-001	3.110e-015	-1.451e+001
8388608	1.19209e-007	7.853981633974070e-001	5.259e-014	-1.328e+001

```
16777216 5.96046e-008 7.853981633975844e-001 1.733e-013 -1.276e+001
33554432 2.98023e-008 7.853981633973781e-001 8.934e-014 -1.305e+001
```

$N = 4194304$ ($h = 2^{-27}$) で相対誤差がマシンイプシロン程度になると、丸め誤差の累積の影響が現れ始め、これ以上刻み幅 h を小さくしても誤差は減少しない。

2. $f(x) = \sqrt{x}$ の $x = 2$ における数値微分を中心差分

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

で倍精度計算した。その結果を下記に記す。

$x = 2.000000$, $f(x) = x^{1/2}$

$f'(x)$ (exact) = 3.535533905932737e-001

	h	f'(x) (numerical)	error
1	5.00000e-001	3.563939586926008e-001	8.034e-003
2	2.50000e-001	3.542486889354093e-001	1.967e-003
3	1.25000e-001	3.537263197936396e-001	4.891e-004
4	6.25000e-002	3.535965674160142e-001	1.221e-004
5	3.12500e-002	3.535641813391095e-001	3.052e-005
	...		
15	3.05176e-005	3.535533906033379e-001	2.847e-011
16	1.52588e-005	3.535533905960619e-001	7.886e-012
17	7.62939e-006	3.535533905960619e-001	7.886e-012
18	3.81470e-006	3.535533905960619e-001	7.886e-012
19	1.90735e-006	3.535533905378543e-001	1.567e-010
20	9.53674e-007	3.535533905960619e-001	7.886e-012
21	4.76837e-007	3.535533905960619e-001	7.886e-012
22	2.38419e-007	3.535533905960619e-001	7.886e-012
23	1.19209e-007	3.535533910617232e-001	1.325e-009
24	5.96046e-008	3.535533901304007e-001	1.309e-009
25	2.98023e-008	3.535533882677555e-001	6.578e-009
26	1.49012e-008	3.535533919930458e-001	3.959e-009
27	7.45058e-009	3.535533994436264e-001	2.503e-008
28	3.72529e-009	3.535533845424652e-001	1.711e-008
29	1.86265e-009	3.535533547401428e-001	1.014e-007
30	9.31323e-010	3.535534143447876e-001	6.718e-008

$h = 2^{-20}$ あたりから桁落ちの影響が現れ始め、これ以上刻み幅 h を小さくしても誤差は減衰しない。