

数値計算・講義資料—補間—

(担当) 緒方秀教 (e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

2015年12月15日(火)4限

定理 1 (等間隔標本点 Lagrange 補間の誤差 [1]) 区間 $[-1, 1]$ 上の関数 $f(x)$ に対する n 点 Lagrange 補間 $f_n(x)$ について,

$$\|f - f_n\| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - f_n(x)|$$

とおく. $f(z)$ が複素平面内の閉曲線

$$\mathcal{A}(\rho) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{(z+1)^{z+1}}{(z-1)^{z-1}} \right| = (2\rho)^2 \right\} \quad (\rho > 1)$$

(図 1 参照) およびその内部を含む複素領域で正則ならば,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|^{1/n} \leq \rho^{-1}$$

が成り立つ. □

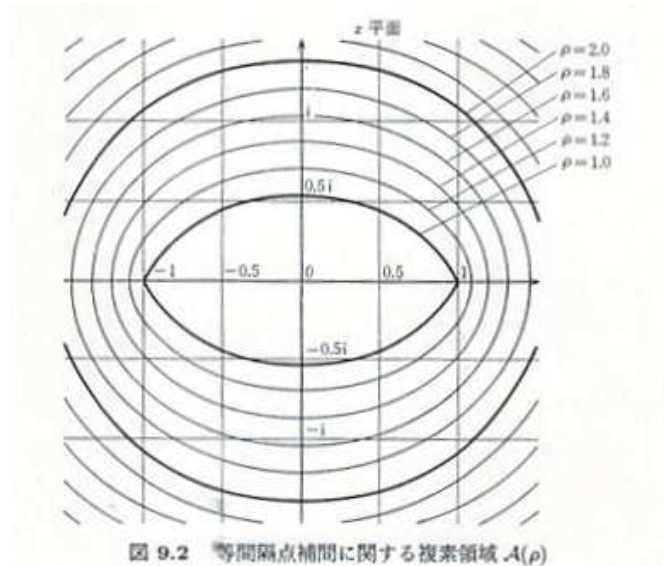


図 1: 複素領域 $\mathcal{A}(\rho)$ ([1] より引用).

関数

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

は $z = \pm i/5$ に極を持ち, それはいかなる $\rho \geq 1$ に対しても, 複素閉曲線 $\mathcal{A}(\rho)$ 内部に含まれる. したがって, $f(x)$ は定理 1 の条件を満たさない. 図 2 は関数 $f(x)$ に対し 33 点等間隔標本点 Lagrange 補間および Chebyshev 補間を行った結果を示す. 等間隔標本点 Lagrange 補間では Runge の現象, すなわち, 区間 $[-1, 1]$ 端点近傍で激しい振動が起きていることがわかる.

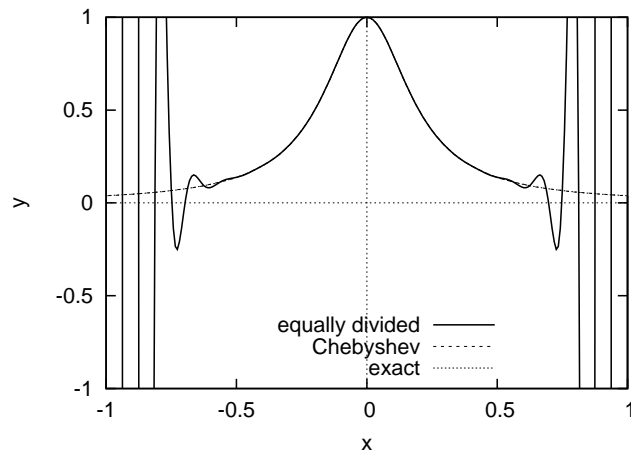


図 2: 等間隔標本点 Lagrange 補間における Runge の現象. Chebyshev 補間.

参考文献

- [1] 杉原正顯, 室田一雄: 数値計算法の数理, 岩波書店, 1994 年.