数値計算・講義資料—Legendre 多項式の母関数・漸化式—

（担当）緒方秀教 (e-mail)ogata@im.uec.ac.jp

2016 年 1 月 12 日（火）

1 Legendre 関数の母関数

Legendre 多項式に対する Rodrigues の公式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \quad (\, n = 0, 1, 2, \dots\,).$$

と複素関数論の Goursat の公式より

$$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

が成り立つ．ただし，C は複素 z 平面内の点 $z = x$ の周りを一周する閉積分路である．これより，t を実数パラメタとして，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^{n+1}\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{1}{z-x}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{t(z^2-1)}{2(z-x)}\right\}^n\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{1}{z-x}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{t(z^2-1)}{2(z-x)}}\mathrm{d}z = \frac{-1}{\mathrm{i}\pi t}\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z^2-(2/t)z+2x/t-1}\end{aligned}$$

を得る．2 番目の等号において，$|t|$ は十分小さいと仮定すれば，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{t(z^2-1)}{2(z-x)}\right\}^n$ は一様収束し，積分と無限和の操作は交換可能である [1]．被積分関数の分母に現れる z についての 2 次関数 $z^2-(2/t)z+2x/t-1$ の 2 根を $z_\pm = \dfrac{1}{t}\{1\pm\sqrt{1-2xt+t^2}\}$ とすれば，$t\to 0$ のとき，$z_+\to\infty$，$z_-\to x$ である．したがって，$|t|$ が十分小さければ，複素積分の被積分関数は C 及びその内部において，1 位の極 $z = z_-$ を除いて正則である．よって，留数定理より

$$\frac{-1}{\mathrm{i}\pi t}\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z^2-(2/t)z+2x/t-1} = \frac{-2/t}{z_--z_+} = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}$$

を得る．

Legendre 関数の母関数表示

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \quad (\, |t| < 1,\ |x| \leqq 1\,).$$

[1] 実は $|t|$ を「十分小さく」取らなくても，$|t| < 1$ かつ $|x| \leqq 1$ ならば級数は一様収束するようにできる．[3] §2.3 を参照すること．

2 Legendreの微分方程式

Legendreの微分方程式

$u = P_n(x)$ は次の方程式を満たす：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{(1-x^2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right\} + n(n+1)u = 0. \tag{1}$$

証明 [1] §10 を参考にした.

$$X = 1 - x^2, \quad K_n = (-1)^n 2^n n!, \quad \mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tag{2}$$

とおく．Leibniz の公式

$$\mathrm{D}^n(fg) = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\mathrm{D}^m f\,\mathrm{D}^{n-m}\,g, \quad \binom{n}{m} = {}_n\mathrm{C}_m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

を繰り返し適用することにより，

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{n+1}[X\,\mathrm{D}[X^n]] &= X\,\mathrm{D}^{n+2}[X^n] + (n+1)\,\mathrm{D}[X]\,\mathrm{D}^{n+1}[X^n] + \binom{n+1}{2}\mathrm{D}^2[X]\,\mathrm{D}^n[X^n] \\
&= X\,\mathrm{D}^2\cdot\mathrm{D}[X^n] + (n+1)X'\,\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^n[X^n] + \binom{n+1}{2}X''\,\mathrm{D}^n[X^n] \\
&\quad (\mathrm{D}^n[X^n] = K_nP_n(x) \text{ であるから}) \\
&= K_n\left\{XP_n'' + (n+1)X'P_n' + \binom{n+1}{2}X''P_n\right\}
\end{aligned}$$

を得る．一方，

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{n+1}[X\,\mathrm{D}[X^n]] &= \mathrm{D}^{n+1}[X\,\mathrm{D}[X\cdot X^{n-1}]] \\
&= \mathrm{D}^{n+1}[X\left\{\mathrm{D}[X]X^{n-1} + X\cdot(n-1)X'X^{n-2}\right\}] = \mathrm{D}^{n+1}\,[X^n\,\mathrm{D}[X] + (n-1)X'X^n] \\
&= \mathrm{D}^{n+1}\,[\{K_1P_1 + (n-1)X'\}X^n] \\
&= \{K_1P_1 + (n-1)X'\}\,\mathrm{D}^{n+1}[X^n] + (n+1)\{K_1P_1' + (n-1)X''\}\,\mathrm{D}^n[X^n] \\
&= K_n\,[\{K_1P_1 + (n-1)X'\}\,\mathrm{D}[K_nP_n] + (n+1)\{K_1 + (n-1)X''\}P_n]
\end{aligned}$$

である．上の 2 式は等しいから，少々計算することにより，

$$XP_n'' + (2X' - K_1P_1)P_n' - (n+1)\left(K_1 + \frac{n-2}{2}X''\right)P_n = 0$$

を得る．これに (2) を代入することにより，$u = P_n(x)$ は微分方程式 (1) を満たすことがわかる．

■

3 Legendre 多項式の漸化式

Legendre 多項式の漸化式

上昇演算子 $T^{(n)}$，下降演算子 $T_{(n)}$ をそれぞれ

$$T^{(n)} = -\left(\frac{1-x^2}{n+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - x\right), \quad T_{(n)} = \frac{1-x^2}{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x$$

で定義すれば，

$$T^{(n)}P_n(x) = P_{n+1}(x), \quad T_{(n)}P_n(x) = P_{n-1}(x)$$

が成り立つ．すなわち，次の漸化式が成り立つ：

$$(n+1)P_{n+1} = (x^2-1)P_n'(x) + (n+1)xP_n(x), \tag{3}$$

$$nP_{n-1}(x) = -(x^2-1)P_n'(x) + nxP_n(x). \tag{4}$$

証明　[2] §20 による．Rodrigues の公式より，

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \frac{1}{2^n n!}\,\mathrm{D}^{n+1}[(x^2-1)^n] = \frac{1}{2^n n!}\,\mathrm{D}^n[2nx(x^2-1)^n] \\ &= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\,\mathrm{D}^n[x(x^2-1)^{n-1}] \\ &= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\{x\,\mathrm{D}^n[(x^2-1)^{n-1}] + n\,\mathrm{D}^{n-1}[(x^2-1)^{n-1}]\} \end{aligned}$$

を得る．両辺に (x^2-1) を掛けて微分すれば，$u = P_n(x)$ が微分方程式 (1) を満たすことにより，

$$\begin{aligned} \mathrm{D}[(x^2-1)P_n'] &= \mathrm{D}[x(x^2-1)P_{n-1}'] + n\,\mathrm{D}[(x^2-1)P_{n-1}] \\ &= x\,\mathrm{D}[(x^2-1)P_{n-1}'] + (x^2-1)P_{n-1}' + n\,\mathrm{D}[(x^2-1)P_{n-1}], \\ n(n+1)P_n &= n(n-1)xP_{n-1} + (x^2-1)P_{n-1}' + n(x^2-1)P_{n-1}' + 2nxP_{n-1} \\ &= n(n+1)xP_{n-1} + (n+1)(x^2-1)P_{n-1}' \end{aligned}$$

により，漸化式 (3) を得る．

漸化式 (4) は，漸化式 (3) と三項漸化式

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}P_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)$$

から $P_{n+1}(x)$ を消去することにより得る．

■

参考文献

[1] 犬井鉄郎：特殊函数，岩波全書，1962 年.

[2] 小松勇作：特殊関数，朝倉書店，1967 年.

[3] 時弘哲治：工学における特殊関数，共立出版，2006 年.