応用数学・中間試験・解答

（担当）緒方秀教　(e-mail) `ogata@im.uec.ac.jp`

2016 年 6 月 7 日（火）

第 1 問　$f(x)$ を次で定義される周期 2π の周期関数とする．

$$f(x) = \pi - |x| \quad (-\pi \leqq x < \pi).$$

1. $f(x)$ の実 Fourier 級数を求めよ．
2. $f(x)$ の複素 Fourier 級数を求めよ．
3. 前問までの結果を用いて，級数 $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$ を求めよ．
4. Parseval の等式を用いて，級数 $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4}$ を求めよ．

1.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x.$$

$f(x)$ は偶関数であるから，$b_n = 0$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\mathrm{d}x.$$

$n \neq 0$ に対しては，部分積分により，

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}(\pi - x)(\sin nx)'\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi n}\left\{\Big[(\pi - x)\sin nx\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right\} \\ &= \frac{2\{1 - (-1)^n\}}{\pi n^2} \\ &= \begin{cases} 0 & n：偶数 \\ \dfrac{4}{\pi(2m+1)^2} & n = 2m+1\text{（奇数，}m = 0,1,2,\ldots\text{）}. \end{cases} \\ a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\mathrm{d}x = \pi. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}. \tag{1}$$

2.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2m+1)x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2m+1)x}}{(2m+1)^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2m+1)x}}{(2m+1)^2}.$$

3. 式 (1) に $x=0$ を代入して，

$$\pi=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2},\quad \therefore\quad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

4. 2. で得られた複素 Fourier 級数を $f(x)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ とおくと，Parseval の等式より

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺}&=\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-|x|)^2\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2,\\
\text{右辺}&=2\pi\left\{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4}\right\}=\frac{\pi^3}{2}+\frac{8}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4}\\
&=\frac{\pi^3}{2}+\frac{16}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4},
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

第 2 問　$f(x)$ を次で定義される周期 2π の周期関数とする．

$$f(x)=\cosh x\quad(-\pi\leqq x<\pi).$$

1. $f(x)$ の複素 Fourier 級数を求めよ．
2. $f(x)$ の実 Fourier 級数を求めよ．
3. 前問までの結果を用いて，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ を求めよ．
4. Parseval の等式を用いて，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n^2)^2}$ を求めよ．

1.

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},\\
c_n&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}n)x}+\mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}n)x}\right\}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\sinh\pi\frac{(-1)^n}{1+n^2}.
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{\pi}\sinh\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{1+n^2}.$$

2.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\sinh\pi\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx})}{1+n^2}\right\}=\frac{1}{\pi}\sinh\pi\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx\right\}.\tag{2}$$

3. 式 (2) で $x=\pi$ とおいて,

$$\cosh\pi = \frac{1}{\pi}\sinh\pi\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}\right), \quad \therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}(\pi\coth\pi - 1).$$

4. Parseval の等式より

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int_{-\pi}^{\pi}\cosh^2 x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi}\cosh^2 x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}(1+\cosh 2x)\mathrm{d}x \\
&= \pi + \frac{1}{2}\sinh 2\pi = \pi + \sinh\pi\cosh\pi, \\
\text{右辺} &= 2\pi\left(\frac{1}{\pi}\sinh\pi\right)^2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+n^2)^2} = \frac{2}{\pi}\sinh^2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+n^2)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+n^2)^2} &= 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n^2)^2} = \frac{\pi^2}{2\sinh^2\pi} + \frac{\pi}{2}\coth\pi, \\
\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+n^2)^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{2\sinh^2\pi} + \frac{\pi}{2}\coth\pi - 1\right).
\end{aligned}$$