

数値計算・講義資料

(担当) 緒方秀教 (e-mail)ogata@im.uec.ac.jp

2016年10月4日(火)

1. 計算機による数値表現

$$\frac{\pi}{4} = 0.78539816\dots$$

$$\approx + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{2^{17}} + \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{2^{19}} + \frac{1}{2^{23}} + \frac{1}{2^{24}} \right) \times 2^0$$

(2進数)

$$= + \left(\frac{C}{16} + \frac{9}{16^2} + \frac{F}{16^4} + \frac{E}{16^5} + \frac{B}{16^6} \right) \times 16^0$$

(16進数, A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15).

		指数部 7ビット			仮数部 24ビット				
2進数	0	100	0000	1100	1001	0000	1111	1110	1011
16進数		4	0	C	9	0	F	E	B

図 1: 16進6桁浮動小数点数による $\pi/4$ の表現. はじめの1ビットは符号を表す (0 = +, 1 = -). 指数部が $(1000000)_2$ となっているは, $-2^6 = (-64) \sim 2^6 - 1 (= 63)$ を $0 \sim 2^7 - 1 (= 127)$ にかさ上げしているからである.

2. 積分に対する台形則

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{h}{2}f(a) + h \sum_{k=1}^{N-1} f(kh) + \frac{h}{2}f(b), \quad h = \frac{b-a}{N}$$

に対する丸め誤差の累積. 積分

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0.785398163397448\dots$$

を台形則で倍精度計算し, その相対誤差を調べた. 結果を下に記す.

```

I(exact) = 7.853981633974483e-001
N      h      I(trapezoidal rule)  error  log10(error)
-----
2  5.00000e-001  7.750000000000000e-001  1.324e-002  -1.878e+000
4  2.50000e-001  7.827941176470589e-001  3.316e-003  -2.479e+000
8  1.25000e-001  7.847471236227722e-001  8.289e-004  -3.081e+000
16 6.25000e-002  7.852354030103472e-001  2.072e-004  -3.684e+000
32 3.12500e-002  7.853574732937438e-001  5.181e-005  -4.286e+000
    
```

```

64 1.56250e-002 7.853879908714134e-001 1.295e-005 -4.888e+000
128 7.81250e-003 7.853956202659381e-001 3.238e-006 -5.490e+000
256 3.90625e-003 7.853975276145704e-001 8.095e-007 -6.092e+000
512 1.95313e-003 7.853980044517305e-001 2.024e-007 -6.694e+000
1024 9.76563e-004 7.853981236610180e-001 5.059e-008 -7.296e+000

2048 4.88281e-004 7.853981534633400e-001 1.265e-008 -7.898e+000
4096 2.44141e-004 7.853981609139211e-001 3.162e-009 -8.500e+000
8192 1.22070e-004 7.853981627765683e-001 7.905e-010 -9.102e+000
16384 6.10352e-005 7.853981632422254e-001 1.976e-010 -9.704e+000
32768 3.05176e-005 7.853981633586421e-001 4.941e-011 -1.031e+001

65536 1.52588e-005 7.853981633877433e-001 1.236e-011 -1.091e+001
131072 7.62939e-006 7.853981633950301e-001 3.079e-012 -1.151e+001
262144 3.81470e-006 7.853981633968494e-001 7.625e-013 -1.212e+001
524288 1.90735e-006 7.853981633972924e-001 1.985e-013 -1.270e+001
1048576 9.53674e-007 7.853981633974174e-001 3.930e-014 -1.341e+001

2097152 4.76837e-007 7.853981633974280e-001 2.587e-014 -1.359e+001
4194304 2.38419e-007 7.853981633974507e-001 3.110e-015 -1.451e+001
8388608 1.19209e-007 7.853981633974070e-001 5.259e-014 -1.328e+001
16777216 5.96046e-008 7.853981633975844e-001 1.733e-013 -1.276e+001
33554432 2.98023e-008 7.853981633973781e-001 8.934e-014 -1.305e+001

```

$N = 4194304$ ($h = 2^{-27}$) で相対誤差がマシンイプシロン程度になると、丸め誤差の累積の影響が現れ始め、これ以上刻み幅 h を小さくしても誤差は減少しない。

3. $f(x) = \sqrt{x}$ の $x = 2$ における数値微分を中心差分

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

で倍精度計算した。その結果を下記に記す。

$x = 2.000000$, $f(x) = x^{1/2}$

$f'(x)$ (exact) = 3.535533905932737e-001

	h	f'(x) (numerical)	error
1	5.00000e-001	3.563939586926008e-001	8.034e-003
2	2.50000e-001	3.542486889354093e-001	1.967e-003
3	1.25000e-001	3.537263197936396e-001	4.891e-004
4	6.25000e-002	3.535965674160142e-001	1.221e-004
5	3.12500e-002	3.535641813391095e-001	3.052e-005
	...		
15	3.05176e-005	3.535533906033379e-001	2.847e-011

16 1.52588e-005 3.535533905960619e-001 7.886e-012
17 7.62939e-006 3.535533905960619e-001 7.886e-012
18 3.81470e-006 3.535533905960619e-001 7.886e-012
19 1.90735e-006 3.535533905378543e-001 1.567e-010
20 9.53674e-007 3.535533905960619e-001 7.886e-012
21 4.76837e-007 3.535533905960619e-001 7.886e-012
22 2.38419e-007 3.535533905960619e-001 7.886e-012
23 1.19209e-007 3.535533910617232e-001 1.325e-009
24 5.96046e-008 3.535533901304007e-001 1.309e-009
25 2.98023e-008 3.535533882677555e-001 6.578e-009
26 1.49012e-008 3.535533919930458e-001 3.959e-009
27 7.45058e-009 3.535533994436264e-001 2.503e-008
28 3.72529e-009 3.535533845424652e-001 1.711e-008
29 1.86265e-009 3.535533547401428e-001 1.014e-007
30 9.31323e-010 3.535534143447876e-001 6.718e-008

$h = 2^{-20}$ あたりから桁落ちの影響が現れ始め、これ以上刻み幅 h を小さくしても誤差は減衰しない。