複素解析，超函数と数値解析
—創造的な数値解析—
（電気通信大学オープンキャンパス）

緒方研究室
（電気通信大学 I 類情報数理工学プログラム）

2016 年 11 月 27 日（日）

0. 数値解析とはどういう学問か？

科学技術研究開発に現れる数学の問題を，コンピュータを使って解く方法の研究・開発を行う学問.

スーパーコンピュータ「京」

0. 数値解析とはどういう学問か？

創造的な数値解析

- 簡単な道具
- 数学の知識

$$\Downarrow$$

高性能の数値計算公式

今回は数値積分を例に，数値解析を創造してみせます.

1. まず，積分について

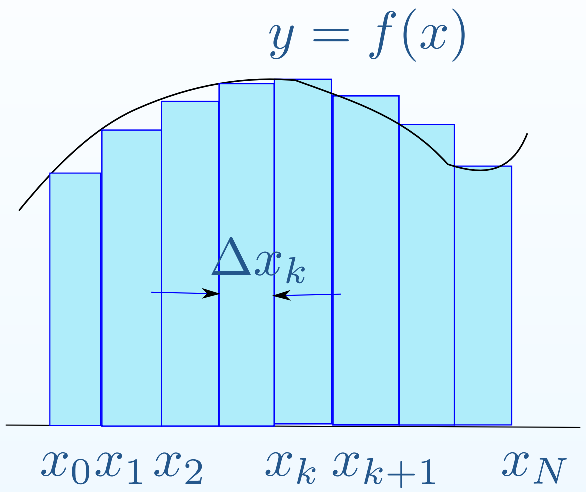
関数 $f(x)$ の積分の定義

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k)\Delta x_k,$$

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad (\ k = 0, 1, \ldots, N-1\ )$$

ただし，極限は次のようにとる：

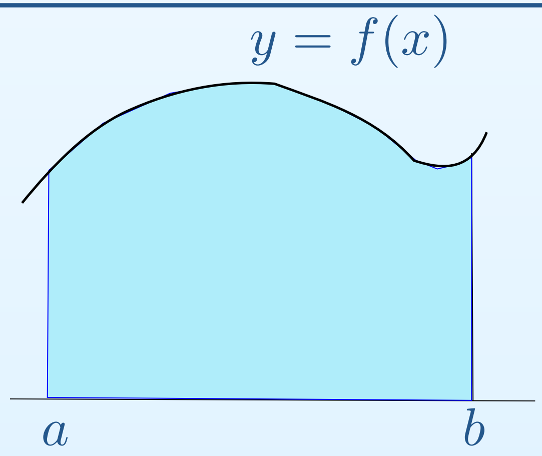
$$N \to \infty, \quad \max_{0 \leqq k < N} \Delta x_k \to 0.$$



ただし，$x_0 = a, x_N = b$.

刻みを細かくとると…

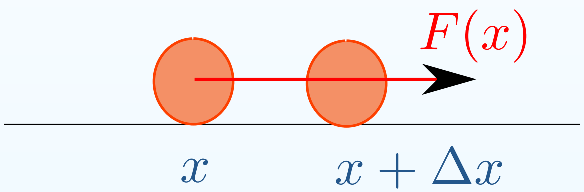
$\longrightarrow$ グラフ $y = f(x)$ と x 軸に挟まれた部分の面積.



1. まず，積分について（積分の応用例）

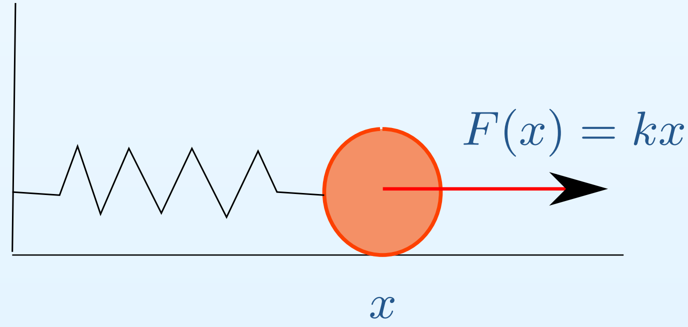
物体に力 $F(x)$ をかけて点 $x = a$ から点 $x = b$ まで動かすとき，

$$\begin{aligned} W &= \text{物体にする力} \\ &= \text{物体が得るエネルギー} \\ &= \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{N-1} F(x_k)\Delta x_k \\ &= \int_a^b F(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$



（例）バネ振り子（バネ定数 k）の点 x における
エネルギーは

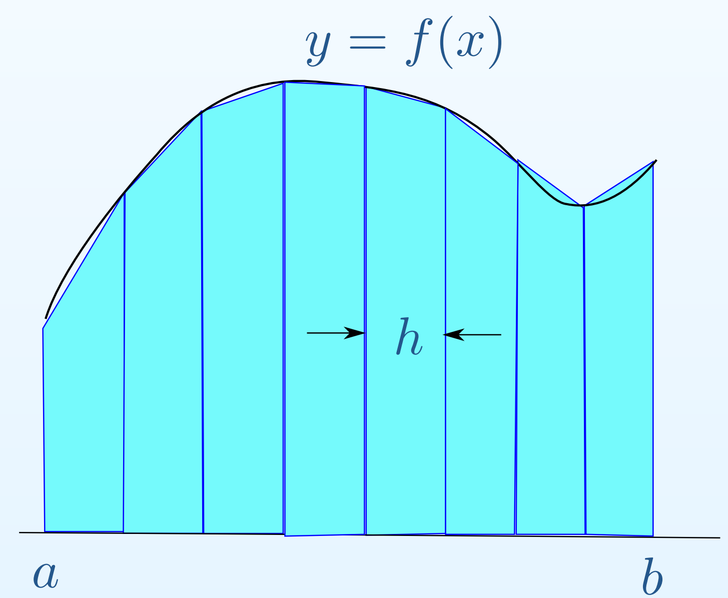
$$W = \int_0^x kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2.$$



2. 台形公式—一番素朴な数値積分公式—

台形公式（いちばん素朴な数値積分公式）

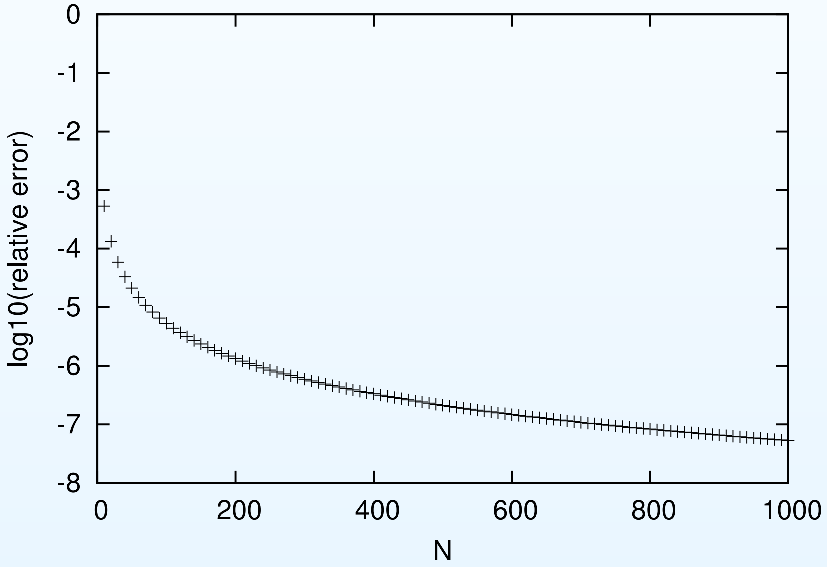
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{h}{2}f(a) + h\sum_{k=1}^{N-1} f(a+hk) + \frac{h}{2}f(b), \quad h = \frac{b-a}{N}.$$



2. 台形公式—いちばん素朴な数値積分公式—

数値実験例

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0.78539\,81633\,97448\ldots$$



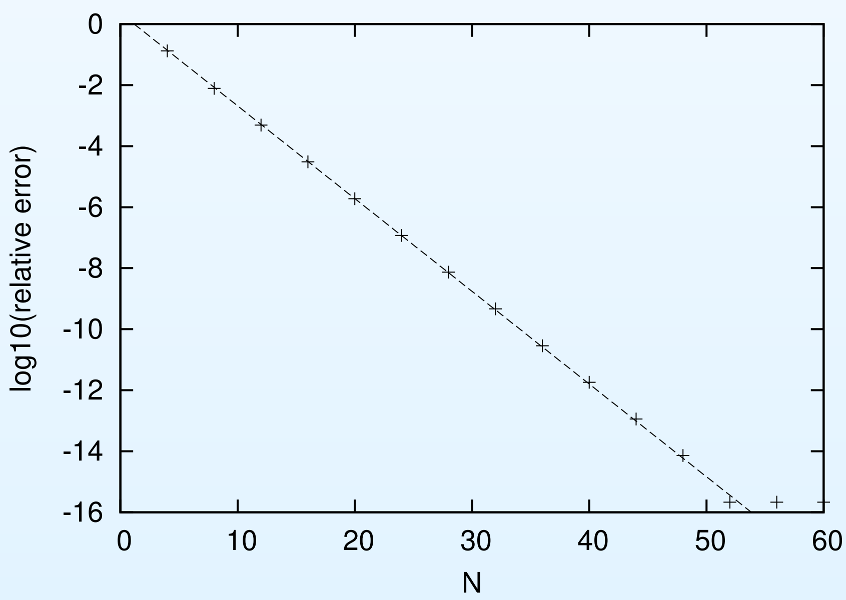
横軸：N（標本点数）
縦軸：$\log_{10}$（相対誤差）

$N = 1000$ 点で 誤差 $\sim 10^{-7}$ くらい.
まあ，こんなものかなあ…

2. 台形公式—いちばん素朴な数値積分公式—

台形公式は，周期関数の一周期区間積分に対しては強い.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1.25 - \cos x} = \frac{8\pi}{3} = 8.37758\,04095\,72782\ldots$$



横軸：N（標本点数）
縦軸：$\log_{10}$（相対誤差）

標本点数 $N = 54$ で誤差 $\sim 10^{-15}$.
誤差は指数関数的減衰する.

誤差 $=$ 定数 $\times\, 0.50^N$.

2. 台形公式—いちばん素朴な数値積分公式—

台形公式は，周期関数の一周期区間積分に対しては強い.

この知識をどうやって一般の積分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ に応用するか？

$\Downarrow$

複素関数論（複素数の微分積分）・佐藤超函数論

佐藤超函数論（佐藤幹夫，1958 年）

- 複素関数論に基づく一般化関数論
- 特異性（不連続，微分不可能性，発散 etc.）のある関数を，複素 “解析関数”を用いて表現する.

3. 超函数法：複素積分による数値積分

∗ 平山弘：周回積分変換法による数値積分法,
第 44 回数値解析シンポジウム講演予稿集，2015 年，21–24.

$f(z)$:　領域 D における正則関数（複素関数として微分可能な関数），

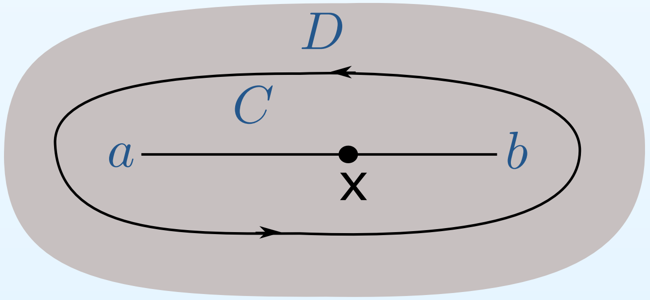
$w(x)$:　重み関数（e^{-x^2}, $x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$ など）

積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x$ の近似計算（数値積分）を考える.

（佐藤超函数論）実積分は複素積分で表示される

$$\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\Psi(z)\mathrm{d}z,$$

ここで，$\displaystyle \Psi(z) = \int_a^b \frac{w(x)}{z-x}\mathrm{d}x.$



3. 超函数法：複素積分による数値積分

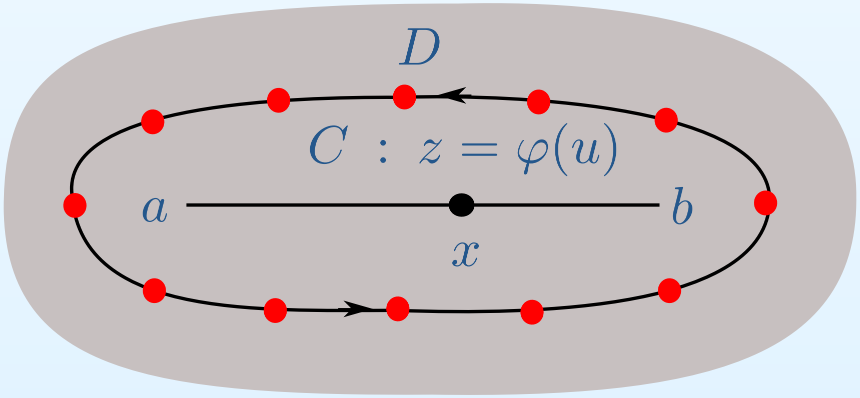
積分路 C をパラメータ表示する：$z = \varphi(u),\ 0 \leqq u \leqq u_{\mathrm{period}}$,

$$\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{u_{\mathrm{period}}} f(\varphi(u))\Psi(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u.$$

右辺は**周期関数の積分**！右辺の積分を台形公式で近似して，

超函数法：複素積分による数値積分法

$$\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{h}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{N-1} f(\varphi(kh))\Psi(\varphi(kh))\varphi'(kh) \quad \left(h = \frac{u_{\mathrm{period}}}{N}\right).$$



4. 数値実験例

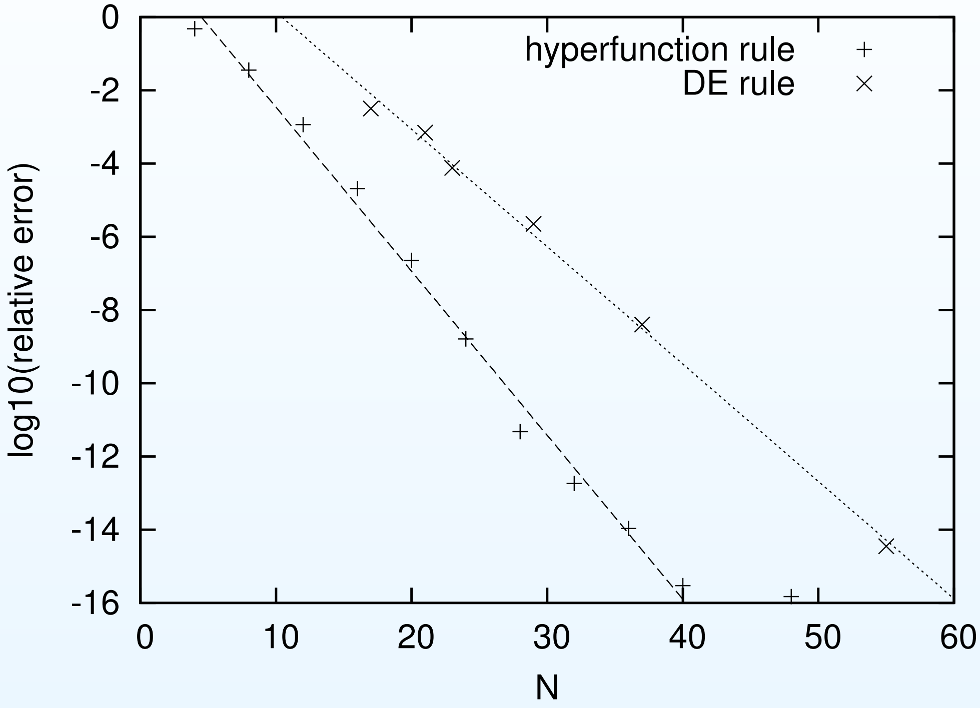
次の積分を，超函数法 v.s. DE 公式で近似計算する.

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} = 1.49364\,82656\,24854\ldots$$

- DE 公式＝二重指数関数型数値積分公式 (Double Exponential formula)
  ⋯数値解析の業界ではよく知られた高性能な数値積分公式.
- 超函数法の複素積分路は次のようにとる：

$$C \ : \ z = 1.25\cos u + \mathrm{i}0.75\sin u, \quad 0 \leqq u < 2\pi \quad \text{（楕円）}.$$

4. 数値実験例



- 超函数法 (hyperfunction)：
  指数関数的に収束
  誤差 $=$ 定数 $\times 0.36^N$.

- DE 公式（DE rule)：
  指数関数的に収束
  誤差 $=$ 定数 $\times 0.48^N$.

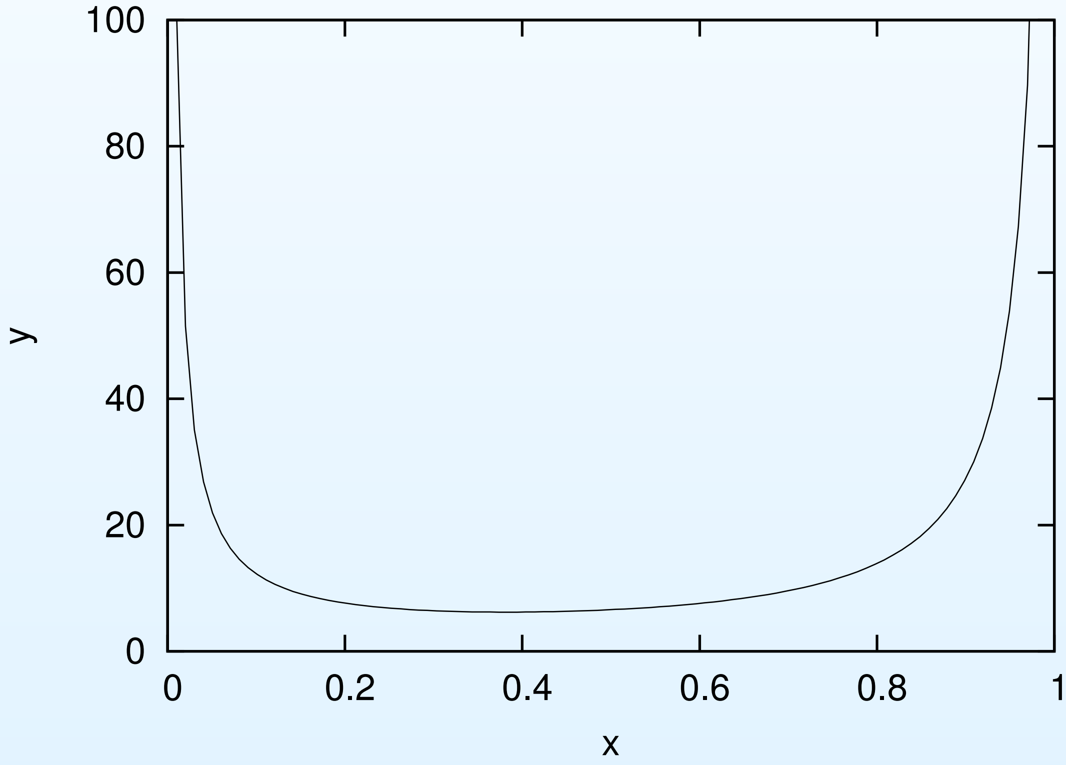
縦軸：$\log_{10}$（相対誤差），横軸：標本点数 N

超函数法が DE 公式にわずかながら勝っている.

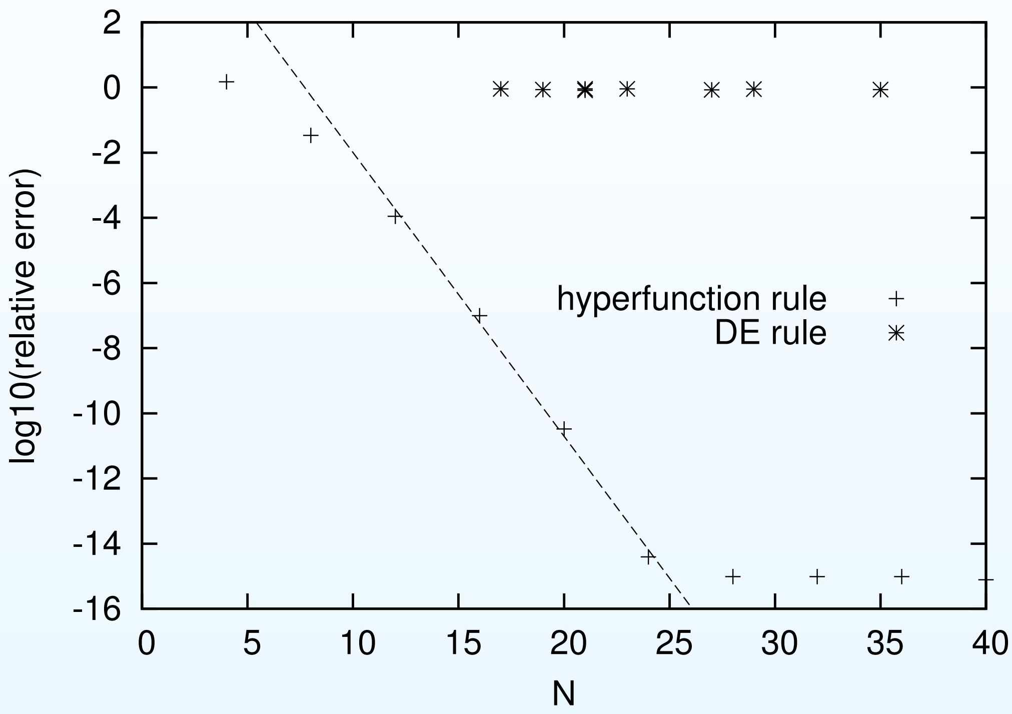
4. 数値実験例

超函数法はとくに積分区間端点に特異性をもつ積分に強い.

$$I = \int_0^1 x^{-0.9999}(1-x)^{-0.9999}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 3.71819\,70362\,84701\ldots\times 10^4.$$



4. 数値実験例



- 超函数法 (hyperfunction)：指数関数的に収束 誤差 $=$ 定数 $\times\, 0.13^N$.
- DE 公式（DE rule)：計算できていない.

縦軸：$\log_{10}$（相対誤差），横軸：標本点数 N

「超函数法」はとくに，**積分区間端点の特異性**が強い積分に対して有効である.

5. まとめ

- 台形公式：周期関数の積分に強い.
- 実関数→［佐藤超函数］→複素積分（周期関数積分）

⇓

超函数法：端点特異性の強い積分に有効.

- 簡単な道具
- 数学の知識

⇓

高性能の数値計算公式

創造的な数値解析.