解析学・講義資料—べき級数の項別微分可能性とその収束半径

（担当）緒方秀教 (e-mail)ogata@im.uec.ac.jp

2015 年 11 月 16 日（月）

定理 1 区間 I における関数列 $f_n(x)$ について，つぎを仮定する：

1. $f_n(x)$ は I で C^1 級である（微分可能かつ $f'(x)$ は連続である）.

2. I 上のある関数 $g(x)$ が存在して，I 内の任意の有界閉区間 $[a,b]$ において $f_n'(x)$ は $[a,b]$ 上で $g(x)$ に一様収束する.

3. ある $c \in I$ に対し極限 $\lim_{n\to\infty} f_n(c)$ が存在する.

このとき，

(i). I 上のある関数 $f(x)$ が存在して，I 内の任意の有界閉区間 $[a,b]$ において $f_n(x)$ は $f(x)$ へ一様収束する.

(ii). 各 $x \in I$ に対し，$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$.

$\square$

証明　有界閉区間 $[a,b](\ni c)$ を任意にとる．このとき，$x \in [a,b]$ について

$$f_n(x) = \int_c^x f_n'(y)\mathrm{d}y + f_n(c) \tag{1}$$

が成り立つ．$f_n'(x) \to g(x)$（$[a,b]$ 上一様収束）であるから，式 (1) 右辺は $n \to \infty$ で $\int_c^x g(y)\mathrm{d}y + \gamma$ $(\gamma = \lim_{n\to\infty} f_n(c))$ に収束する．よって，$f_n(x)$ の $n \to \infty$ における極限も存在し，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$（各点収束）とおくと，

$$f(x) = \int_c^x g(y)\mathrm{d}y + \gamma \tag{2}$$

が成り立つ．(1) と (2) の差をとると，

$$f_n(x) - f(x) = \int_c^x \{f_n'(y) - g(y)\}\mathrm{d}y + f_n(c) - \gamma. \tag{3}$$

$\epsilon > 0$ を任意にとるとある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$|f_n'(y) - g(y)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \quad (\,\forall y \in [a,b],\ \forall n \geqq n_0\,),$$
$$|f_n(c) - \gamma| < \frac{\epsilon}{2} \quad (\,\forall n \geqq n_0\,)$$

が成り立つ．よって，(3) より，

$$|f_n(x) - f(x)| \leqq (b-a)\cdot\frac{\epsilon}{2(b-a)} + \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (\,\forall n \geqq n_0\,)$$

が成り立つ．$x \in [a,b]$ は任意であったから，これは $f_n(x)$ が $[a,b]$ 上 $f(x)$ に一様収束することを示す．そして，(2) を x について微分すれば，$f'(x) = g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ がわかる．$\blacksquare$

定理 2 べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が収束半径 R を持つならば，それを項別微分して得られるべき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ も収束半径 R を持ち，

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right\}' = \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n x^n\}' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (\,\forall x \in (-R, R)\,).$$

$\square$

証明　べき級数 $\sum a_n x^n$ とその項別積分 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ の収束半径が等しいことの証明における議論をべき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ と $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(n+1) a_{n+1}}{n+1} x^{n+1}$ に適用すれば，これらのべき級数の収束半径が等しいことがわかる．

関数列 $f_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ は定理 1 の仮定 1, 2 を満たす．そして，$c \in (-R, R)$ を任意にとれば，$\displaystyle\lim_{N\to\infty} f_N(c) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ は収束する．したがって，定理 1 より任意の $x \in (-R, R)$ に対して $\left\{\displaystyle\lim_{N\to\infty} f_N(x)\right\}' = \displaystyle\lim_{N\to\infty} f'_N(x)$, すなわち，

$$\begin{aligned}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right\}' &= \left\{\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right\}' = \lim_{N\to\infty} \left\{\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\right\}' \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \{a_n x^n\}' = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\end{aligned}$$

が成立する． $\blacksquare$