解析学・期末試験・解答

（担当）緒方秀教 (e-mail)ogata@im.uec.ac.jp

2003 年 2 月 18 日（月）

第 1 問　x を $-1 < x < 1$ なる実数，n を正の整数とする．

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$ を x, n の式で表せ．
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n-1)x^{n-2}$ を x, n の式で表せ．
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$ を x の式で表せ．

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$.
2. 前問の級数を項別微分すればよい．
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) \\ &= \frac{-nx^{n-1}}{1-x} + \frac{1-x^n}{(1-x)^2} = \frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$
3. $|x| < 1$ に注意して，
$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

第 2 問　次の常微分方程式の一般解を求めよ．

(1)　$y'' - 3y' + 2y = 0$　　(2)　$y'' + 4y' + 5y = 0$　　(3)　$y'' + 6y' + 9y = 0$

(4)　$y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$　　(5)　$y'' + y = \mathrm{e}^x$　　(6)　$y'' - 4y = \mathrm{e}^{2x}$

以下，C_1, C_2 は任意の定数を表すものとする．

(1). $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}$.

(2). $y = \mathrm{e}^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$.

(3). $y = \mathrm{e}^{-3x}(C_1 + C_2 x)$.

(4). 同次形 $y'' + y = 0$ の一般解は $y = C_1\cos x + C_2\sin x$. もとの方程式の特解を定数変化法により求める：$y = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$. ただし，$c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0$ とする．
$$\begin{aligned}y' &= c_1'\cos x + c_2'\sin x - c_1\sin x + c_2\cos x = -c_1\sin x + c_2\cos x,\\ y'' &= -c_1'\sin x + c_2'\cos x - c_1\cos x - c_2\sin x,\end{aligned}$$

$$y'' + y = -c_1' \sin x + c_2' \cos x.$$

したがって，c_1', c_2' に対する次の連立一次方程式を得る．

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \\ -c_1' \sin x + c_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

これを c_1', c_2' について解いて，

$$c_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}, \quad c_2'(x) = 1, \quad c_1(x) = \log|\cos x|, \quad c_2(x) = x,$$
$$\therefore \quad y = \cos x \log|\cos x| + x \sin x.$$

したがって，もとの方程式の一般解は

$$y = \cos x \log|\cos x| + x \sin x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.x$$

(5). 同次形 $y'' + y = 0$ の一般解は $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. 特解は $y = A\mathrm{e}^x$ とおいてもとの方程式に代入することにより，$A = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$ と求まる．ゆえに，もとの方程式の一般解は

$$y = \frac{\mathrm{e}^x}{2} + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

(6). 同次形 $y'' - 4y = 0$ の一般解は $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}$. 特解を求めるため，$y = \mathrm{e}^{2x}u(x)$ とおいてもとの方程式に代入すると，

$$y' = \mathrm{e}^{2x}(u' + 2u), \quad y'' = \mathrm{e}^{2x}(u'' + 4u' + 4u), \quad y'' - 4y = \mathrm{e}^{2x}(u'' + 4u'),$$
$$\therefore \quad u'' + 4u' = 1.$$

$u(x) = c_1 x + c_0$ とおいて代入すると，

$$4c_1 = 1, \quad c_1 = \frac{1}{4}, \quad u(x) = \frac{x}{4} + c_0, \quad y = \frac{x}{4}\mathrm{e}^{2x} + c_0\mathrm{e}^{2x}.$$

$y = c_0\mathrm{e}^{2x}$ は同次形の解であるから，特解 $y = (x/4)\mathrm{e}^{2x}$ を得る．ゆえに，一般解は

$$y = \left(\frac{x}{4} + C_1\right)\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}.$$

第 3 問　ω, ω_0 を正の定数，A を実数定数とする．

$$y'' + {\omega_0}^2 y = A \cos \omega x$$

の一般解を求めよ（$\omega_0 \neq \omega$, $\omega_0 = \omega$ の場合に場合分けすること）．

同次形 $y'' + {\omega_0}^2 y = 0$ の一般解は $y = C_1 \cos \omega_0 x + C_2 \sin \omega_0 x$.
$\omega \neq \omega_9$ の場合，特解を $y = C \cos \omega x$ （D は定数）とおいてもとの方程式に代入すれば，

$$C(-\omega^2 + {\omega_0}^2) \cos \omega x = A \cos \omega x, \quad C = \frac{A}{{\omega_0}^2 - \omega^2}$$

を得るから，一般解は

$$y = \frac{A}{{\omega_0}^2 - \omega^2} \cos \omega x + C_1 \cos \omega_0 x + C_2 \sin \omega_0 x.$$

$\omega = \omega_0$ の場合，方程式

$$y'' + {\omega_0}^2 y = A \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}$$

の解を求めれば，その実部はもとの方程式の解である．$y = u(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}$ とおいて上の方程式に代入すると，

$$y' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}(u' + \mathrm{i}\omega_0 u), \quad y'' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}(u'' + 2\mathrm{i}\omega_0 u' - {\omega_0}^2 u),$$
$$y'' + {\omega_0}^2 y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}(u'' + 2\mathrm{i}\omega_0 u')$$

により

$$u'' + 2\mathrm{i}\omega_0 u' = A$$

を得る．$u(x) = c_1 x + c_0$ とおくと，

$$2\mathrm{i}\omega_0 c_1 = A, \quad c_1 = \frac{A}{2\mathrm{i}\omega_0}, \quad u(x) = \frac{A}{2\mathrm{i}\omega_0} x + c_0, \quad y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x} \left(\frac{A}{2\mathrm{i}\omega_0} x + c_0 \right).$$

$y = c_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}$ は同次形の解であるから，特解 $y = \dfrac{A}{2\mathrm{i}\omega_0} x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}$ を得る．実部をとって，$y = \dfrac{A}{2\omega_0} x \sin \omega_0 x$. ゆえに，もとの方程式の一般解は

$$y = \frac{A}{2\omega_0} x \sin \omega_0 x + C_1 \cos \omega_0 x + C_2 \sin \omega_0 x.$$