解析学・期末試験

（担当）緒方秀教 (e-mail)ogata@im.uec.ac.jp

2014 年 2 月 17 日（月）

注意

- 問題は第 1 問〜第 2 問の 2 問ある．解答用紙（2 枚）は，1 問につき 1 枚使用すること．
- 筆記用具以外の持ち込みは不可とする．

第 1 問 (級数)

1. 次の関数の $x=0$ におけるテイラー展開を記せ（答のみ記すこと）。

   (1) e^x (2) $\sin x$ (3) $\cos x$ (4) $(1+x)^\alpha$（α は定数） (5) $\log(1+x)$

2. 次のべき級数の収束半径を求めよ。

   (1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^p}$ （p は正の定数） (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(3^n-1)x^n$

   $$(4)\quad F(\alpha,\gamma;x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\frac{x^n}{n!}$$

   （合流型超幾何関数，α,γ は定数，$\gamma\neq 0,-1,-2,\cdots$）

3. x を $-1<x<1$ なる数とする。

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$ を x を用いて表せ。

   (b) 項別積分を利用することにより $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ を求めよ。

   (c) 項別積分を利用することにより $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ を求めよ。

第 2 問（常微分方程式）

1. 次の常微分方程式の一般解を求めよ．ただし，虚数の指数関数が現れた時は $\sin,\cos$ を用いて解を書き直すこと（たとえば，$y''+y=0$ の解は $y=C_1\cos x+C_2\sin x$ （C_1,C_2 は任意定数）とする)。

   (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(y+1)$ (2) $y''+3y'+2y=0$ (3) $y''-4y'+4y=0$ (4) $y''+6y'+10y=0$

2. ω,ω_0 を正の定数，A を実数定数とする．

   $$y''+{\omega_0}^2y=A\cos\omega x$$

   の一般解を求めよ（$\omega_0\neq\omega$, $\omega_0=\omega$ の場合に場合分けすること）.

以上