解析学・期末試験・解答

（担当）緒方秀教　(e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

2016 年 2 月 15 日（月）

第 1 問

1. $(1+x^2)^{-1}$ の $x=0$ における Taylor 級数を記せ.
2. $\arctan x = \tan^{-1} x = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{1+\xi^2}$ を用いて，$\arctan x$ の $x=0$ における Taylor 級数を求めよ.

1. $(1+x^2)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.
2. 前問の Taylor 級数を項別積分して
$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

第 2 問　次の常微分方程式の一般解を求めよ．ただし，虚数変数の指数関数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$（$\theta$ は実数変数）は Euler の公式を用いて三角関数に書き直すこと.

$$(1)\quad y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (2)\quad y'' - 8y' + 16y = 0 \quad (3)\quad y'' + 2y' + 2y = 0$$
$$(4)\quad y'' - 5y' + 4y = 4x^2 - 6x + 1 \quad (5)\quad y'' - 5y' + 6y = \mathrm{e}^x(2x^2 - 6x + 6)$$

以降，C_1, C_2 は任意定数を表すとする.

(1). $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}$.

(2). $y = \mathrm{e}^{4x}(C_1 + C_2 x)$.

(3). $y = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

(4). 斉次方程式 $y' - 5y' + 4y = 0$ の一般解は $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{4x}$ である．もとの方程式の特解として，未定係数法または山辺の方法により $y = x^2 + x + 1$ を得る．ゆえに，もとの方程式の一般解は，$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{4x} + x^2 + x + 1$.

(5). 斉次方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ の一般解は $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}$．もとの方程式の特解を求めるために，$y = \mathrm{e}^x u(x)$ とおいて代入すると，$u'' - 3u' + 2u = x^2 - 3x + 3$. この方程式の特解として，未定係数法または山辺の方法により $u = x^2 + 2$ を得る．したがって，元の方程式の一般解は $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x(x^2+2)$.

第 3 問　ばね定数 $k(>0)$ のばねにつながれたおもり（質量 $m(>0)$）が，外力 $F_0\cos\omega t$（F_0, ω は正の定数）を受けながら運動している（図 1 参照）．この時，ばねの釣り合い位置からの変位 $x(t)$ は運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx + F_0\cos\omega t$$

に従う．初期条件

$$x(0) = x_0 \text{（定数）}, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$$

のもとでの運動方程式の解を求めよ．

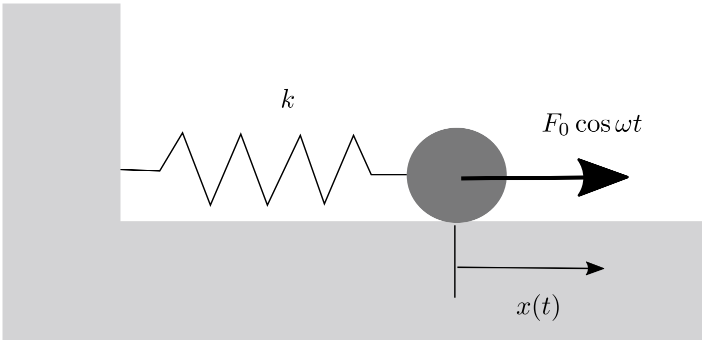

図 1: ばねにつながれたおもりの運動.

題意の方程式を書き直すと，

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2x = C_0\cos\omega t \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ C_0 = \frac{F_0}{m}\right). \tag{1}$$

特解を $\omega \neq \omega_0$ の場合，$\omega = \omega_0$ の場合に場合分けして求める．

$\omega \neq \omega_0$ の場合は，$y = A\cos\omega t$（A は定数）とおいて (1) に代入することにより，$A = \dfrac{C_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2}$，すなわち，特解 $y = \dfrac{C_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2}\cos\omega t$ を得る．

$\omega = \omega_0$ の場合は，方程式

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2x = C_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} \tag{2}$$

の特解を求めて実部を取れば，もとの方程式の特解となる．$x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}u(t)$ とおいて (2) に代入すれば，$\ddot{u} + 2\mathrm{i}\omega_0\dot{u} = C_0$ を得る．この方程式の特解として，$u(t) = \dfrac{C_0}{2\mathrm{i}\omega_0}t$ がある．よって，方程式 (2) の特解として $x = \dfrac{C_0}{2\mathrm{i}\omega_0}t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$ がある．したがって，この実部 $x = \dfrac{C_0}{2\omega_0}t\sin\omega_0 t$ は方程式 (2) の特解である．

以上より，方程式 (1) の一般解は次のとおりである．

$$x = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \begin{cases} \dfrac{C_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2}\cos\omega t & (\,\omega \neq \omega_0\,) \\ \dfrac{C_0}{2\omega_0}t\sin\omega_0 t & (\,\omega = \omega_0\,). \end{cases}$$

あとは，初期条件より定数 C_1, C_2 を定めて，

$$x = \begin{cases} \left(x_0 - \dfrac{C_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2} \right) \cos \omega_0 t + \dfrac{C_0}{{\omega_0}^2 - \omega^2} \cos \omega t & (\ \omega \neq \omega_0\ ) \\ x_0 \cos \omega_0 t + \dfrac{C_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t & (\ \omega = \omega_0\ ). \end{cases}$$