

解析学・期末試験・解答

(担当) 緒方秀教 (e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

2016年2月15日(月)

第1問

1. $(1+x^2)^{-1}$ の $x=0$ における Taylor 級数を記せ.
2. $\arctan x = \tan^{-1} x = \int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi^2}$ を用いて, $\arctan x$ の $x=0$ における Taylor 級数を求めよ.

1. $(1+x^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.
2. 前問の Taylor 級数を項別積分して

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

第2問 次の常微分方程式の一般解を求めよ. ただし, 虚数変数の指数関数 $e^{i\theta}$ (θ は実数変数) は Euler の公式を用いて三角関数に書き直すこと.

- (1) $y'' - 3y' + 2y = 0$ (2) $y'' - 8y' + 16y = 0$ (3) $y'' + 2y' + 2y = 0$
(4) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 - 6x + 1$ (5) $y'' - 5y' + 6y = e^x(2x^2 - 6x + 6)$

以降, C_1, C_2 は任意定数を表すとする.

- (1). $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.
- (2). $y = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$.
- (3). $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.
- (4). 斉次方程式 $y' - 5y' + 4y = 0$ の一般解は $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$ である. もとの方程式の特解として, 未定係数法または山辺の方法により $y = x^2 + x + 1$ を得る. ゆえに, もとの方程式の一般解は, $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + x^2 + x + 1$.
- (5). 斉次方程式 $y'' - 3y' + 2y = 0$ の一般解は $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. もとの方程式の特解を求めるために, $y = e^x u(x)$ において代入すると, $u'' - 3u' + 2u = x^2 - 3x + 3$. この方程式の特解として, 未定係数法または山辺の方法により $u = x^2 + 2$ を得る. したがって, 元の方程式の一般解は $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^x(x^2 + 2)$.

第3問 ばね定数 $k(>0)$ のばねにつながれたおもり（質量 $m(>0)$ ）が、外力 $F_0 \cos \omega t$ (F_0, ω は正の定数) を受けながら運動している（図1参照）．この時、ばねの釣り合い位置からの変位 $x(t)$ は運動方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_0 \cos \omega t$$

に従う．初期条件

$$x(0) = x_0 \text{ (定数)}, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0$$

のもとでの運動方程式の解を求めよ．

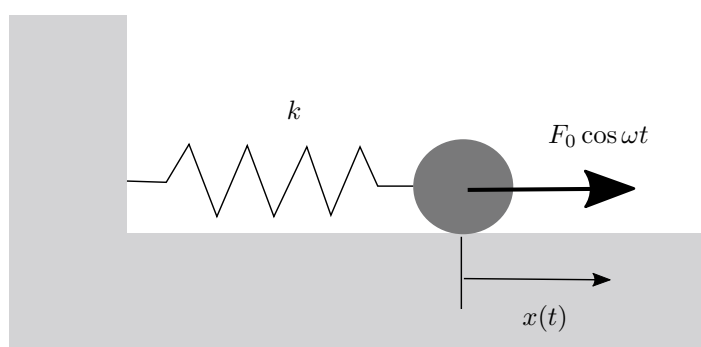


図1: ばねにつながれたおもりの運動.

題意の方程式を書き直すと,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = C_0 \cos \omega t \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, C_0 = \frac{F_0}{m} \right). \quad (1)$$

特解を $\omega \neq \omega_0$ の場合, $\omega = \omega_0$ の場合に場合分けして求める.

$\omega \neq \omega_0$ の場合は, $y = A \cos \omega t$ (A は定数) とおいて (1) に代入することにより, $A = \frac{C_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$, すなわち, 特解 $y = \frac{C_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$ を得る.

$\omega = \omega_0$ の場合は, 方程式

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = C_0 e^{i\omega_0 t} \quad (2)$$

の特解を求めて実部を取れば, もとの方程式の特解となる. $x = e^{i\omega_0 t} u(t)$ とおいて (2) に代入すれば, $\ddot{u} + 2i\omega_0 \dot{u} = C_0$ を得る. この方程式の特解として, $u(t) = \frac{C_0}{2i\omega_0} t$ がある. よって, 方程式 (2) の特解として $x = \frac{C_0}{2i\omega_0} t e^{i\omega_0 t}$ がある. したがって, この実部 $x = \frac{C_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t$ は方程式 (2) の特解である.

以上より, 方程式 (1) の一般解は次のとおりである.

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \begin{cases} \frac{C_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t & (\omega \neq \omega_0) \\ \frac{C_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t & (\omega = \omega_0). \end{cases}$$

あとは、初期条件より定数 C_1, C_2 を定めて、

$$x = \begin{cases} \left(x_0 - \frac{C_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{C_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t & (\omega \neq \omega_0) \\ x_0 \cos \omega_0 t + \frac{C_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t & (\omega = \omega_0). \end{cases}$$