解析学・中間試験・解答

（担当）緒方秀教 (e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

2015 年 12 月 14 日（月）10:50〜11:50（60 分）

第 1 問　次の関数の $x = 0$ における Taylor 級数（Maclaurin 級数）を記せ（解答のみ記すこと）.

$$(1)\ \exp x \quad (2)\ \cos x \quad (3)\ \sin x \quad (4)\ \log(1+x) \quad (5)\ (1+x)^\alpha \quad (\alpha \text{ は定数}).$$

(1) $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$　　(2) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

(3) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$　　(4) $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

(5) $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!} x^n.$

第 2 問　次のべき級数の収束半径を求めよ.

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n^2} x^n \quad (a \text{ は定数}) \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n \quad (3)\ \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$$

$$(4)\ F(a,b;c;x) \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)} x^n$$

（超幾何級数，a, b, c は整数でない定数）

$$(5)\ F(a;c;x) \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)} x^n$$

（合流型超幾何級数，a, c は整数でない定数）.

(1). $c_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{n^2}$ とおく.

$$r = \lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \mathrm{e}^a$$

であるから，Cauchy の判定法により，収束半径 $R = \frac{1}{r} = \mathrm{e}^{-a}$.

(2). $c_n = \frac{2^n}{n}$ とおく.

$$r = \lim_{n\to} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$$

であるから，d'Alembert の判定法により，収束半径 $R = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$.

(3). $c_n = n!$ とおく.

$$r = \lim_{n\to} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

であるから，d'Alembert の判定法により，収束半径 $R = \frac{1}{r} = 0$.

(4).

$$c_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)}$$

とおく.

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)} = 1$$

であるから，d'Alembert の判定法により，収束半径 $R = \dfrac{1}{r} = 1$.

(5).

$$c_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)}$$

とおく.

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{a+n}{(n+1)(c+n)} = 0$$

であるから，d'Alembert の判定法により，収束半径 $R = \dfrac{1}{r} = \infty$.

第 3 問　$f(x)$ を $x \geqq 0$ で連続かつ単調減少かつ $f(x) \geqq 0$ を満たす関数とする．そのとき，極限

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^{n+1} f(x)\mathrm{d}x\right\}$$

が存在することを証明せよ.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$$

とおく．$f(x)$ は単調減少であるから，

$$S_n - S_{n-1} = f(n) - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \int_n^{n+1}\{f(n) - f(x)\}\mathrm{d}x \geqq 0$$

により $\{S_n\}$ は単調増加列である．$f(x)$ は単調減少かつ $f(x) \geqq 0$ であるから，

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n}\left\{f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\right\} = \sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}\{f(k) - f(x)\}\mathrm{d}x \\ &\leqq \sum_{k=0}^{n}\int_k^{k+1}\{f(k) - f(k+1)\} = \sum_{k=0}^{n}\{f(k) - f(k+1)\} = f(0) - f(n+1) \leqq f(0) \end{aligned}$$

により $\{S_n\}$ は有界列である（この辺の考察は図を使ってもよい）．有界単調な実数列は収束するから，極限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ は存在する.

以上