佐藤超函数論に基づく フーリエ変換の数値計算法

緒方秀教

電気通信大学　情報理工学研究科　情報・ネットワーク工学専攻

2018 年 3 月 15 日（木）

研究の目的

Fourier 変換

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi \mathrm{i}\xi x)\, \mathrm{d}x.$$

- 従来の数値積分法では計算が困難である（$f(x)$ が減衰の遅い関数の場合）．

研究の目的

Fourier 変換

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-2\pi \mathrm{i} \xi x) \, \mathrm{d}x.$$

- 従来の数値積分法では計算が困難である（$f(x)$ が減衰の遅い関数の場合）．

本研究の目的

佐藤超函数論に基づく Fourier 変換の数値計算.

本講演の内容

本講演の内容

1. 佐藤超函数論の概要

佐藤超函数論（佐藤幹夫, 1958 年）

- 複素関数論に基づく一般化関数論.
- **超函数 (hyperfunction)**
  …ある**複素解析関数 $F(z)$ の境界値の差**

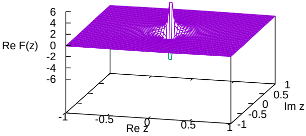
$$f(x) = F(x + \mathrm{i}0) - F(x - \mathrm{i}0).$$

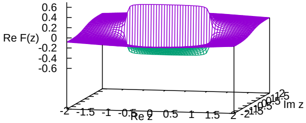
- $F(z)$: 超函数 $f(x)$ の定義関数

1. 佐藤超函数論の概要

$$\delta(x) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left(\frac{1}{x+\mathrm{i}0} - \frac{1}{x-\mathrm{i}0}\right),$$

$$\chi_{(-1,1)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-1,1) \\ 0 & x \notin [-1,1] \end{cases} = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left[\log\left(\frac{x+1+\mathrm{i}0}{x-1+\mathrm{i}0}\right) - \log\left(\frac{x+1-\mathrm{i}0}{x-1-\mathrm{i}0}\right)\right]$$





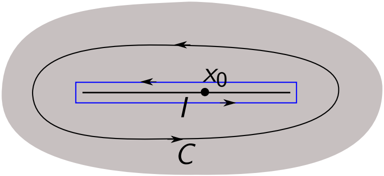
$\delta(x)$ の定義関数

$\chi_{(-1,1)}(x)$ の定義関数

1. 佐藤超函数論の概要

Cauchy の積分定理・積分公式により,

$$\begin{aligned}\int_I f(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_I f(x)\left(\frac{1}{x-x_0+\mathrm{i}0}-\frac{1}{x-x_0-\mathrm{i}0}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-x_0}\mathrm{d}z \\ &= f(x_0).\end{aligned}$$



2. 佐藤超函数論における Fourier 変換

佐藤超函数論では Fourier 変換をどのように扱うか？

2. 佐藤超函数論における Fourier 変換

佐藤超函数論では Fourier 変換をどのように扱うか？

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[f](\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}x \\
&= \left\{\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi+\mathrm{i}0)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi-\mathrm{i}0)x}\mathrm{d}x\right\} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0+}\left\{\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi+\mathrm{i}\epsilon)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi-\mathrm{i}\epsilon)x}\mathrm{d}x\right\}.
\end{aligned}
$$

積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}x$ が通常の意味で存在しない場合も，
収束因子 $\mathrm{e}^{-2\pi\epsilon|x|}$ のおかげで積分できる．

2. 佐藤超函数論における Fourier 変換

（例） $f(x) = 1$ の場合.

$$
\begin{aligned}
\mathscr{F}[1](\xi) &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi+\mathrm{i}0)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi-\mathrm{i}0)x}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\xi+\mathrm{i}0} - \frac{1}{\xi-\mathrm{i}0}\right),
\end{aligned}
$$

2. 佐藤超函数論における Fourier 変換

（例） $f(x) = 1$ の場合.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[1](\xi) &= \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi+\mathrm{i}0)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi-\mathrm{i}0)x}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\xi+\mathrm{i}0} - \frac{1}{\xi-\mathrm{i}0}\right),\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathscr{F}[1](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2\pi\mathrm{i}\xi x)\mathrm{d}x = \delta(\xi).$$

2. 佐藤超函数論における Fourier 変換

$$\mathscr{F}[f](\xi)=\left\{\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi+\mathrm{i}0)x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi-\mathrm{i}0)x}\mathrm{d}x\right\}.$$

2. 佐藤超函数論における Fourier 変換

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \left\{ \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi+\mathrm{i}0)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi-\mathrm{i}0)x}\mathrm{d}x \right\}.$$

これは $F_+(\xi+\mathrm{i}0) - F_-(\xi-\mathrm{i}0)$ の形である
（複素解析関数の境界値の差）．

2. 佐藤超函数論における Fourier 変換

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \left\{ \int_{-\infty}^{0} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(\xi + \mathrm{i}0)x} \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(\xi - \mathrm{i}0)x} \mathrm{d}x \right\}.$$

Fourier 変換 $\mathscr{F}[f](\xi)$…次の定義関数 $F_{\pm}(\zeta)$ をもつ超函数

$$\mathscr{F}[f](\xi) = F_{+}(\xi + \mathrm{i}0) - F_{-}(\xi - \mathrm{i}0),$$

$$F_{+}(\zeta) = \int_{-\infty}^{0} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\zeta x} \mathrm{d}x \quad (\operatorname{Im} \zeta > 0),$$

$$F_{-}(\zeta) = -\int_{0}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\zeta x} \mathrm{d}x \quad (\operatorname{Im} \zeta < 0).$$

2. 佐藤超函数論における Fourier 変換

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \left\{ \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi+\mathrm{i}0)x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(\xi-\mathrm{i}0)x}\mathrm{d}x \right\}.$$

Fourier 変換 $\mathscr{F}[f](\xi)$…次の定義関数 $F_{\pm}(\zeta)$ をもつ超函数

$$\mathscr{F}[f](\xi) = F_{+}(\xi+\mathrm{i}0) - F_{-}(\xi-\mathrm{i}0),$$

$$F_{+}(\zeta) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\zeta x}\mathrm{d}x \quad (\,\mathrm{Im}\,\zeta > 0\,),$$

$$F_{-}(\zeta) = -\int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\zeta x}\mathrm{d}x \quad (\,\mathrm{Im}\,\zeta < 0\,).$$

$F_{\pm}(\zeta)$ を数値計算で求める．

3. Fourier 変換の数値計算法

Fourier 変換 $\mathscr{F}[f](\xi)$ の数値計算法.

いまの Fourier 変換の定義と同じことをやる.

1. 定義関数 $F_{\pm}(\zeta)$ ($\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) を求める.
2. それを実軸まで解析接続する：

$$\mathscr{F}[f](\xi) = F_{+}(\xi + \mathrm{i}0) - F_{-}(\xi - \mathrm{i}0) \quad (\ \xi \in \mathbb{R}\ ).$$

$$F_{+}(\zeta) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\zeta x}\mathrm{d}x \quad (\ \mathrm{Im}\,\zeta > 0\ ),$$

$$F_{-}(\zeta) = -\int_{0}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\zeta x}\mathrm{d}x \quad (\ \mathrm{Im}\,\zeta < 0\ ).$$

3. Fourier 変換の数値計算法

1. 定義関数 $F_{\pm}(\zeta)$ を Taylor 級数の形で求める.

$\zeta_0^{(\pm)}$ ($\pm \operatorname{Im} \zeta_0^{(\pm)} > 0$) を適当に与えて，次の Taylor 級数の係数 $c_n^{(\pm)}$ を通常の数値積分（DE 公式）で計算する.

$$F_{\pm}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\pm)} (\zeta - \zeta_0^{(\pm)})^n \quad (\pm \operatorname{Im} \zeta_0^{(\pm)} > 0),$$

$$c_n^{(\pm)} = \frac{1}{n!} F_{\pm}^{(n)}(\zeta_0^{(\pm)}) = \pm \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} (\pm 2\pi \mathrm{i} x)^n f(\mp x) \mathrm{e}^{\pm 2\pi \mathrm{i} \zeta_0^{(\pm)} x} \mathrm{d}x.$$

$c_n^{(\pm)}$ を与える積分は被積分関数が指数関数的減衰するので，数値積分は容易に行える.

($\pm \operatorname{Im} \zeta_0^{(\pm)} > 0$)

3. Fourier 変換の数値計算法

2. $F_{\pm}(\zeta)$ を実軸まで解析接続する.

Taylor 級数→**連分数**（収束域を広げる）

$$F_{\pm}(\zeta) = \cfrac{a_1^{(\pm)}}{1 + \cfrac{a_2^{(\pm)}(\zeta - \zeta_0^{(\pm)})}{1 + \cfrac{a_3^{(\pm)}(\zeta - \zeta_0^{(\pm)})}{1 + \ddots}}}$$

3. Fourier 変換の数値計算法

2. $F_\pm(\zeta)$ を実軸まで解析接続する.

Taylor 級数→**連分数**（収束域を広げる）

$$F_\pm(\zeta) = \cfrac{a_1^{(\pm)}}{1 + \cfrac{a_2^{(\pm)}(\zeta - \zeta_0^{(\pm)})}{1 + \cfrac{a_3^{(\pm)}(\zeta - \zeta_0^{(\pm)})}{1 + \ddots}}}$$

Taylor 級数の係数 $c_n^{(\pm)}$ →連分数の係数 $a_n^{(\pm)}$ ⋯商差法
商差法は丸め誤差に弱い→多倍長演算

3. Fourier 変換の数値計算法

2. $F_\pm(\zeta)$ を実軸まで解析接続する.

Taylor 級数→**連分数**（収束域を広げる）

$$F_\pm(\zeta) = \cfrac{a_1^{(\pm)}}{1 + \cfrac{a_2^{(\pm)}(\zeta - \zeta_0^{(\pm)})}{1 + \cfrac{a_3^{(\pm)}(\zeta - \zeta_0^{(\pm)})}{1 + \ddots}}}$$

Taylor 級数の係数 $c_n^{(\pm)}$ →連分数の係数 $a_n^{(\pm)}$ ⋯商差法
商差法は丸め誤差に弱い→多倍長演算

$$\mathscr{F}[f](\xi) = F_+(\xi + \mathrm{i}0) - F_-(\xi - \mathrm{i}0).$$

4. 数値例

$$(1)\quad \mathscr{F}[\tanh(\pi x)](\xi) = -\mathrm{i}\,\mathrm{cosech}(\pi\xi),$$

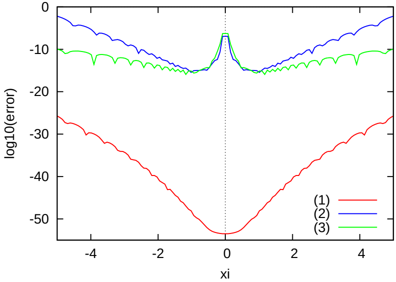
$$(2)\quad \mathscr{F}[(1+x^2)^{-\nu-1/2}] = \frac{2\pi^{\nu+1/2}}{\Gamma(\nu+1/2)}|\xi|^{\nu}K_{\nu}(2\pi|\xi|) \quad (\ \nu = 1.5\ ),$$

$$(3)\quad \mathscr{F}[\log|x|](\xi) = -\gamma\delta(\xi) - \frac{1}{2|\xi|}.$$

これらの Fourier 変換を本方法で計算し，誤差を調べた.

- 定義関数 $F_{\pm}(\zeta)$ の Taylor 級数の中心：$\zeta_0^{(\pm)} = \pm\mathrm{i}$,
- 定義関数 $F_{\pm}(\zeta)$ の Taylor 級数の係数は $c_0, \ldots, c_{40}$ を使用した.
- C++プログラム使用，多倍長演算（10 進 100 桁，exflib）.

4. 数値例



- 縦軸：誤差の常用対数
- 横軸：ξ

$$(1)\ \mathscr{F}[\tanh(\pi x)](\xi), \quad (2)\ \mathscr{F}[(1+x^2)^{-\nu-1/2}](\xi), \quad (3)\ \mathscr{F}[\log|x|].$$

数値積分（DE 公式）の標本点数：(1) 1330 (2) 1422 (3) 1430.

4. 数値例

定義関数

$$F_{\pm}(\lambda) = \pm\int_0^{\infty} f(\mp x)\mathrm{e}^{\pm 2\pi\mathrm{i}\zeta x}\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\pm)}(\zeta - \zeta_0^{(\pm)})^n.$$

Taylor 級数の中心：$\zeta_0^{(\pm)} = \pm\mathrm{i}$,
Taylor 級数の係数

$$c_n^{(\pm)} = \pm\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}(\pm 2\pi\mathrm{i}x)^n f(\mp x)\exp(-2\pi x)\mathrm{d}x.$$

4. 数値例

定義関数

$$F_{\pm}(\lambda) = \pm\int_0^{\infty} f(\mp x)\mathrm{e}^{\pm 2\pi\mathrm{i}\zeta x}\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\pm)}(\zeta - \zeta_0^{(\pm)})^n.$$

Taylor 級数の中心：$\zeta_0^{(\pm)} = \pm\mathrm{i}$,
Taylor 級数の係数

$$c_n^{(\pm)} = \pm\frac{1}{n!}\int_0^{\infty}(\pm 2\pi\mathrm{i}x)^n f(\mp x)\exp(-2\pi x)\mathrm{d}x.$$

振動積分を計算せずに Fourier 変換が計算できた！

4. 数値例

既存の数値計算法との比較.

1. DE 公式& Richardson 加速
   - 戸田・小野（京大数理研講究録, **339** (1978) 74–109).

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-2\pi\mathrm{i}\xi x)\exp(-2^{-n}|x|)\mathrm{d}x.$$

   - 杉原 (J. Comp. Appl. Math., **17** (1987) 47–68).

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-2\pi\mathrm{i}\xi x)\exp(-2^{-n}x^2)\mathrm{d}x.$$

2. 大浦・森の DE 公式
   (J. Comp. Appl. Math., **38** (1991) 353–360).
   数値積分の標本点が被積分関数の零点に急接近するような DE 変換.

4. 数値例

$$\mathscr{F}[\tanh(\pi x)](\xi) = -\mathrm{i}\,\mathrm{cosech}(\pi\xi), \quad \xi = 1.$$

- 多倍長演算（10 進 100 桁，exflib 使用）．
- 本方法における Taylor 級数の中心：$\zeta_0^{(\pm)} = 1 \pm \mathrm{i}$.

	数値積分の標本点数	誤差
本方法（佐藤超函数論）	2610	2.8×10^{-28}
杉原（Richardson 加速）	10060	9.1×10^{-20}
大浦・森の DE 公式	948	5.0×10^{-25}

4. 数値例

- 本方法は従来の DE 公式& Richardson 加速に基づく方法より有効である.
- 大浦・森の DE 公式には敵わない.
- しかし，本方法は Fourier 変換という**関数**を計算している（従来の方法は，Fourier 変換型**積分**を計算している）.
  一旦計算したデータを複数の引数 ξ に対する Fourier 変換 $\mathscr{F}[f](\xi)$ の計算に使いまわしできる.

まとめと今後の課題

1. 佐藤超函数論に基づく Fourier 変換の数値計算法を提案した.
2. 佐藤超函数：複素解析関数（定義関数）の境界値の差：
3. Fourier 変換は佐藤超函数の一つ. 定義関数を計算.
   - 実軸から離れたところで定義関数である解析関数を計算.
   - 定義関数を連分数により実軸上へ解析接続.
4. 数値例：従来の方法（DE 公式& Richardson 加速）に比べて効率的である.

今後の課題

1. 本方法の理論誤差解析.
2. Laplace 逆変換への応用.
3. 連分数を用いた解析接続.

まとめと今後の課題

1. 佐藤超函数論に基づく Fourier 変換の数値計算法を提案した.
2. 佐藤超函数：複素解析関数（定義関数）の境界値の差：
3. Fourier 変換は佐藤超函数の一つ． 定義関数を計算.
   - 実軸から離れたところで定義関数である解析関数を計算.
   - 定義関数を連分数により実軸上へ解析接続.
4. 数値例：従来の方法（DE 公式& Richardson 加速）に比べて効率的である.

今後の課題

1. 本方法の理論誤差解析.
2. Laplace 逆変換への応用.
3. 連分数を用いた解析接続.

Thank you very much!