
情報数理工学実験第二 コンピュータサイエンス実験第二 2次元渦運動の数値シミュレーション

緒方秀教(電気通信大学 情報・通信工学科)

ogata@im.uec.ac.jp

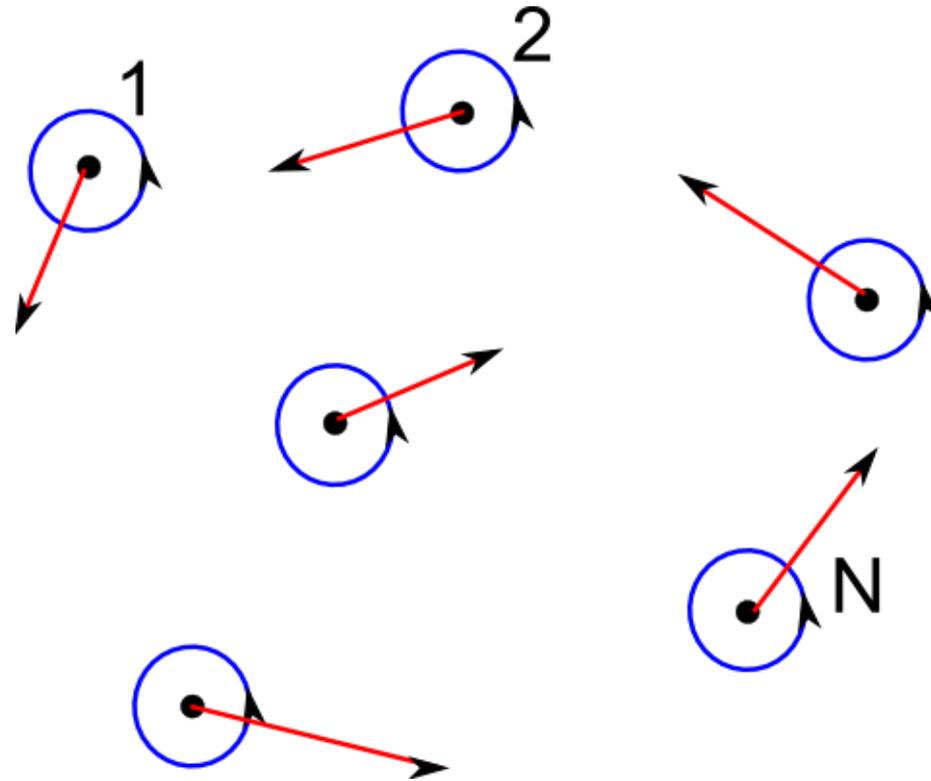
2015年12月2日(水)

はじめに: 本実験の目的(2/24)

- 2次元渦群の運動の数値シミュレーション
 - 2次元ポテンシャル流の基礎
 - 渦群の運動
- 常微分方程式の数値解法
 - Euler(オイラー)法
 - Runge-Kutta(ルンゲ・クッタ)法

渦群の運動(3/24)

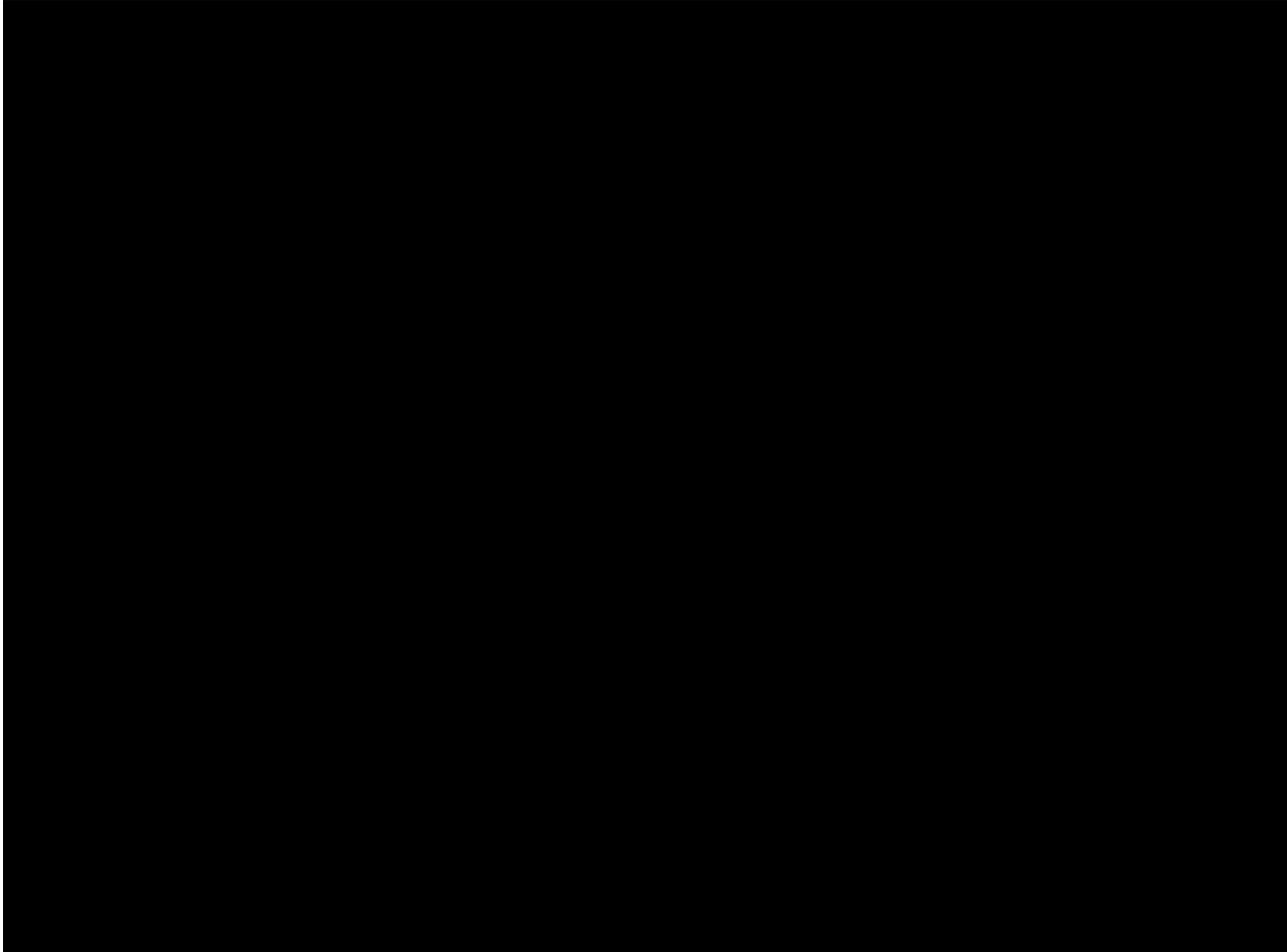
- 複数個の渦群は相互作用し合いながら運動する.



渦群の運動(4/24)

- 複数の渦群は相互作用し合いながら運動する.
- 例: 複数の台風
 - 相互干渉し合い複雑な運動(藤原効果)
 - 映像: 2006年台風7号・8号・9号
国立情報学研究所: デジタル台風資料室
<http://agola.ex.nii.ac.jp/digital-typhoon/reference/>

渦群の運動(複数の台風)(5/24)



2次元ポテンシャル流の基礎(6/24)

- 2次元非粘性・非圧縮流体の定常渦なし流

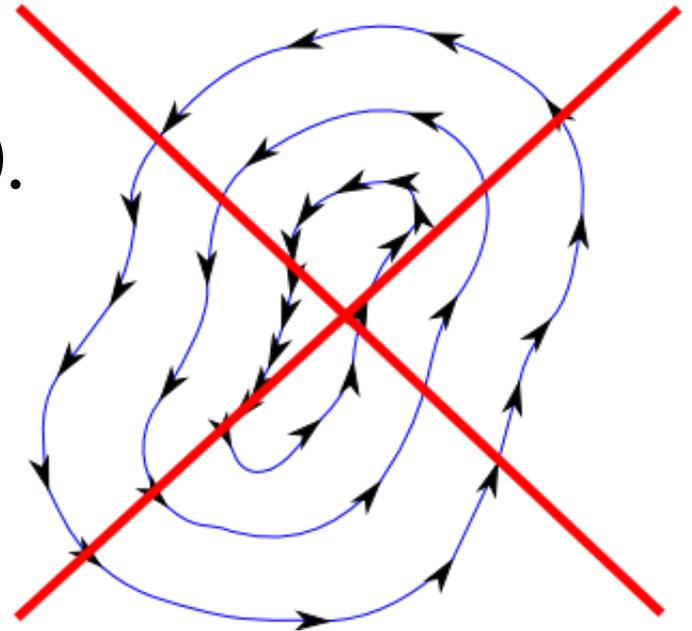
$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}))$ 流速, ρ 質量密度

渦なしの仮定

$$\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}, \text{ i.e., } \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

∴ **速度ポテンシャル**と呼ばれる関数 $\Phi(\mathbf{x})$ が存在して,

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$



ポテンシャル流の基礎(7/24)

流体の質量保存則

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV.$$



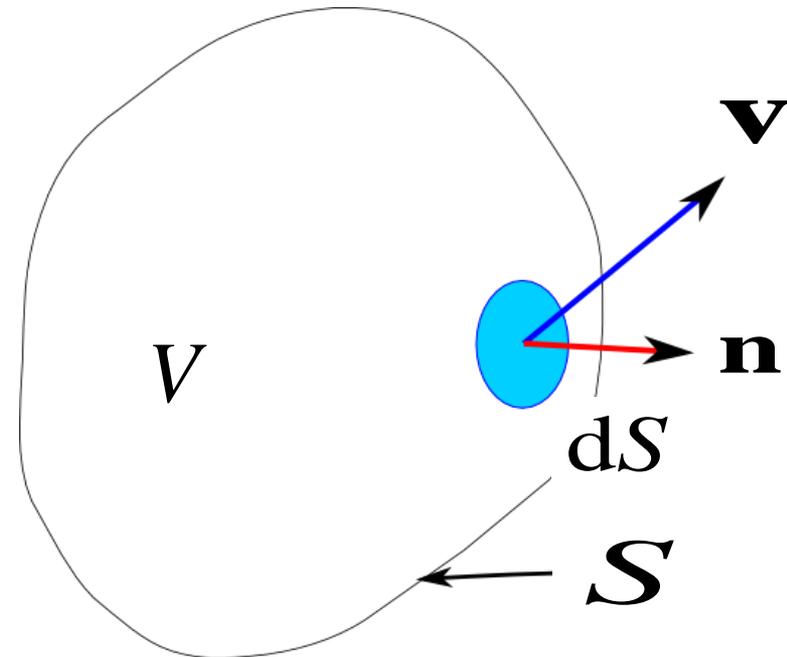
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

非圧縮性($\rho = \text{const.}$) より

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

∴ **流れ関数**と呼ばれる関数 $\Psi(\mathbf{x})$ が存在して

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$



ポテンシャル流の基礎(8/24)

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

(Φ, Ψ) は複素関数論のCauchy-Riemann関係式を満たす.



$$f(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad (z = x + iy)$$

は解析関数である.

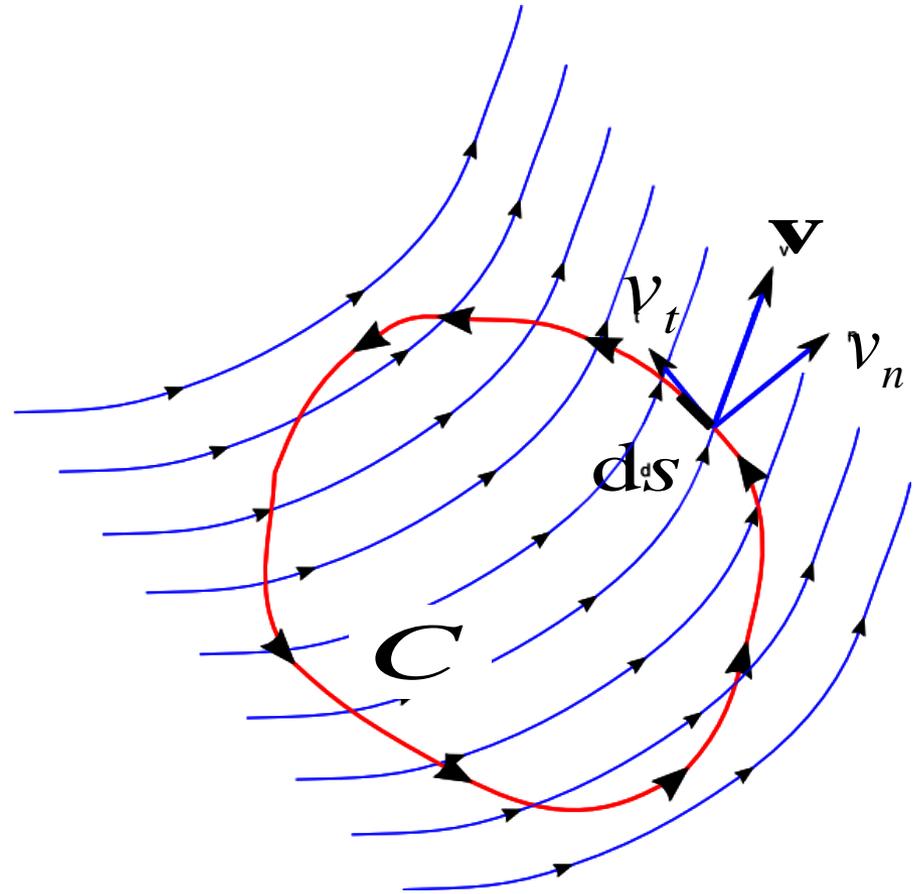
$f(z)$ 複素速度ポテンシャル

複素流速 $u - iv = f'(z)$

ポテンシャル流の基礎(9/24)

- Φ , Ψ の物理的意味

$$\begin{aligned}[f]_C &= [\Phi]_C + i[\Psi]_C \\ &= \oint_C f'(z) dz \\ &= \oint_C (u - iv)(dx + idy) \\ &= \oint_C (u dx + v dy) \\ &\quad + i \oint_C (u dy - v dx).\end{aligned}$$



ポテンシャル流の基礎(10/24)

- Φ, Ψ の物理的意味

$$[\Phi]_C = \oint_C v_t ds \quad \text{循環}$$

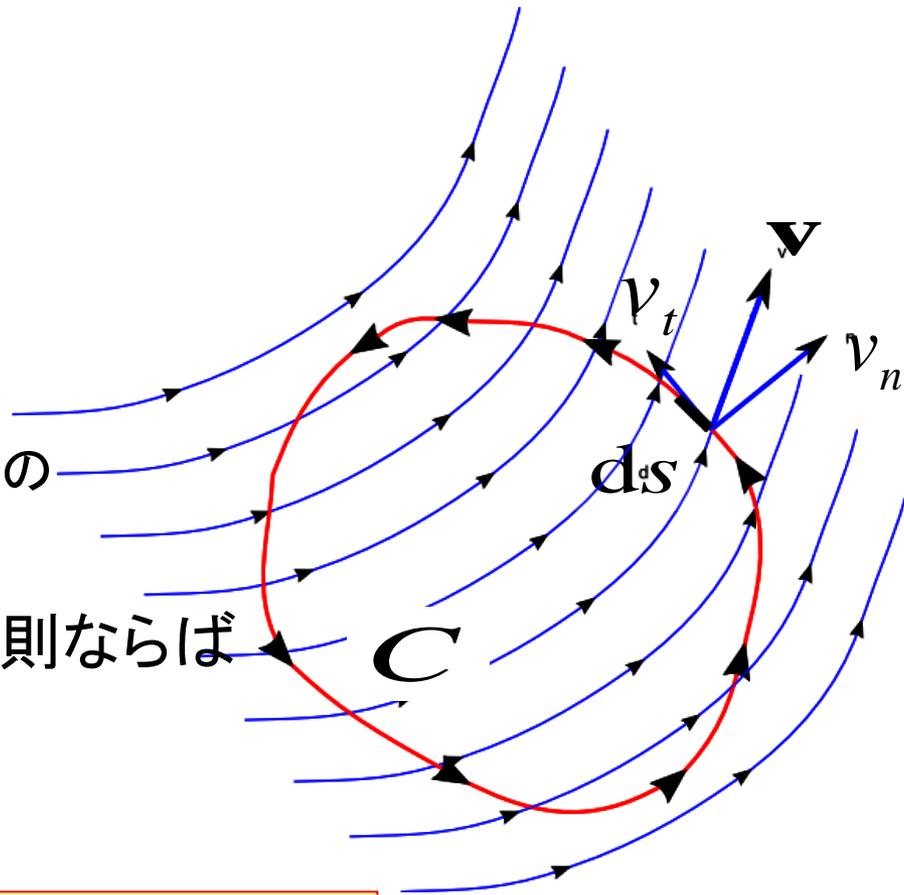
$$[\Psi]_C = \oint_C v_n ds \quad \text{湧き出し}$$

単位時間あたりのC内部からの
湧き出し量

$f(z)$ がCおよびその内部で正則ならば
 $[f]_C=0$ なので,

$$[\Phi]_C = [\Psi]_C = 0.$$

循環の中心・湧き出し点は $f(z)$ の特異点.

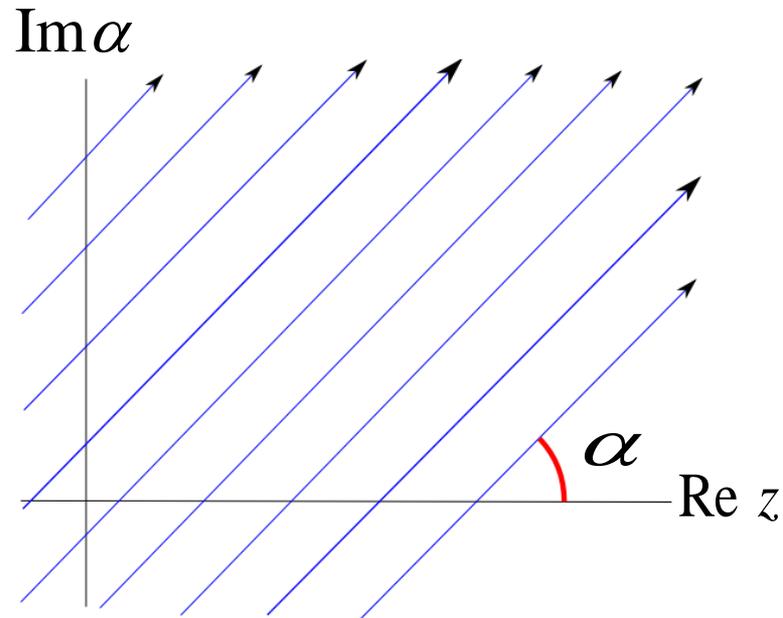


ポテンシャル流の基礎(11/24)

- (例) 一様な流れ

$$f(z) = U e^{-i\alpha} z$$

(U : 流速の大きさ)



$$u - iv = f'(z) = U e^{-i\alpha} = U (\cos \alpha - i \sin \alpha),$$

$$\therefore u = U \cos \alpha, \quad v = U \sin \alpha.$$

ポテンシャル流の基礎(12/24)

■ (例) 湧き出し流

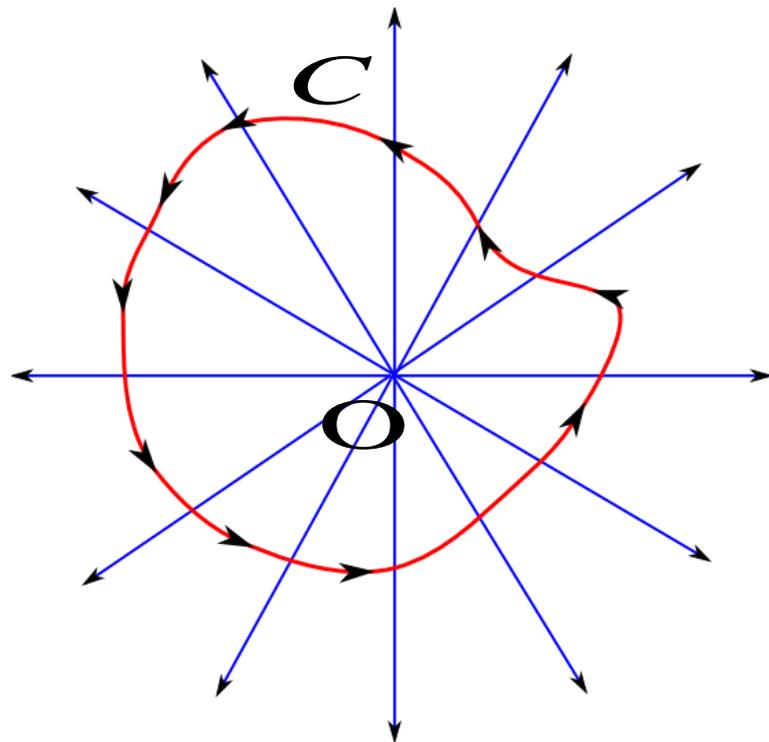
$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \log z$$

(Q : 実数定数)

$$u = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{|z|^2}, \quad v = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{|z|^2}.$$

$$[f(z)]_C = [\Phi]_C + i[\Psi]_C = iQ,$$

\therefore 循環 $[\Phi]_C = 0$, 湧き出し $[\Psi]_C = Q$.



ポテンシャル流の基礎(13/24)

■ (例) 渦流

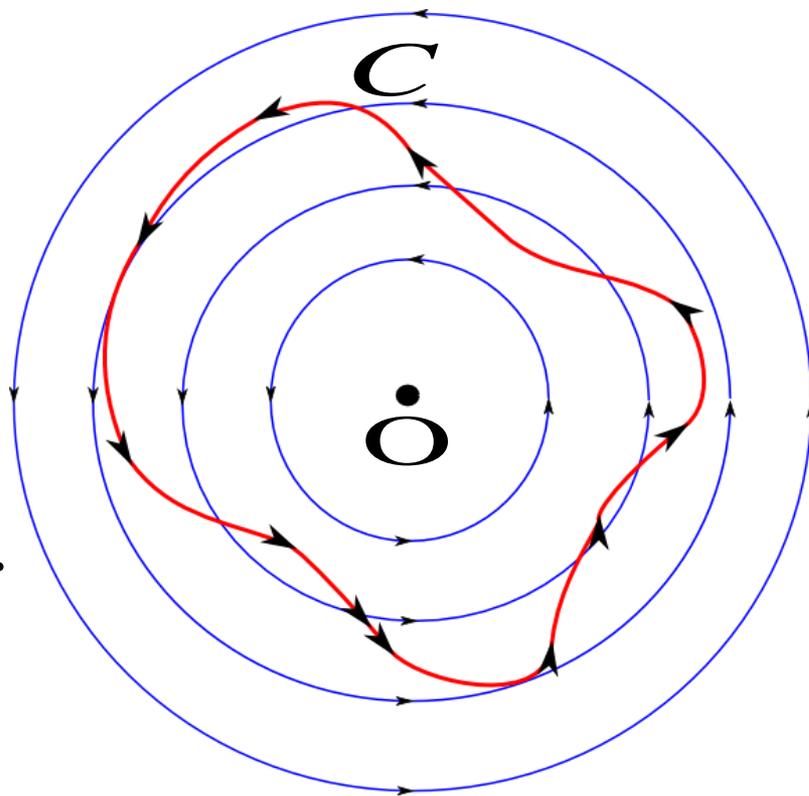
$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z$$

(Γ : 実数定数)

$$u = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{|z|^2}, \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{|z|^2}.$$

$$[f(z)]_C = [\Phi]_C + i[\Psi]_C = \Gamma,$$

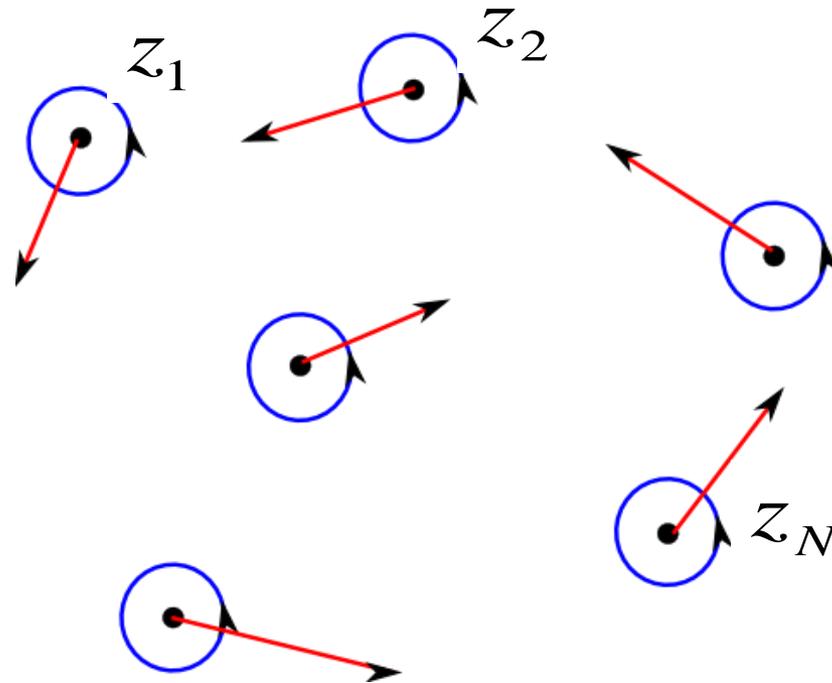
$$\therefore \text{循環 } [\Phi]_C = \Gamma, \quad \text{湧き出し } [\Psi]_C = 0.$$



渦群の運動(14/24)

- N 個の渦群の運動

循環 Γ_j , 中心 z_j ($j=1, 2, \dots, N$)



渦群の運動(15/24)

■ N個の渦群の相互作用

i 番目の渦の複素速度ポテンシャル

$$f_i(z) = \frac{\Gamma_i}{2\pi i} \log(z - z_i).$$

j 番目の渦の中心は, それ以外の渦の作る速度場

$$u - iv = \sum_{i=1(i \neq j)}^N f_i'(z) = \sum_{i=1(i \neq j)}^N \frac{\Gamma_i}{2\pi i} \frac{1}{z - z_i}$$

に乗って運動する.

渦群の運動(16/24)

渦の中心の運動方程式

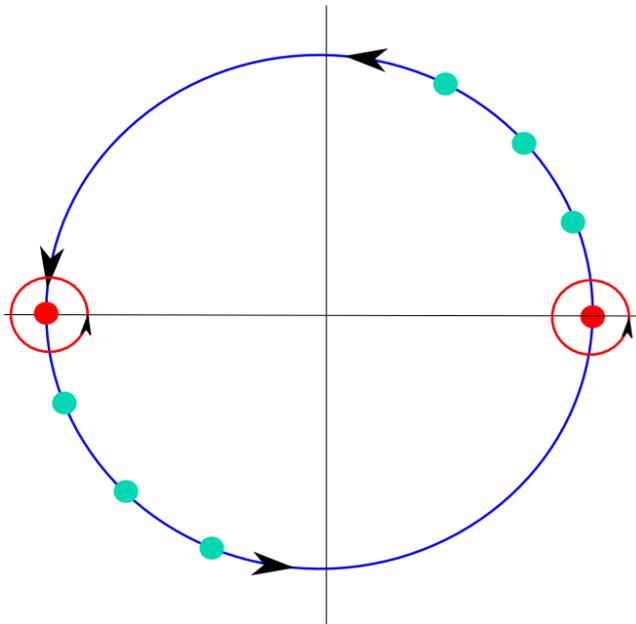
$$\frac{d\bar{z}_j}{dt} = \sum_{i=1(i \neq j)}^N \frac{\Gamma_i}{2\pi i} \frac{1}{z_j - z_i} \quad (j = 1, 2, \dots, N).$$

循環の強さ $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$, 初期位置 $z_1(0), \dots, z_N(0)$ を与えて上の微分方程式を解けば, 渦群の運動が得られる.

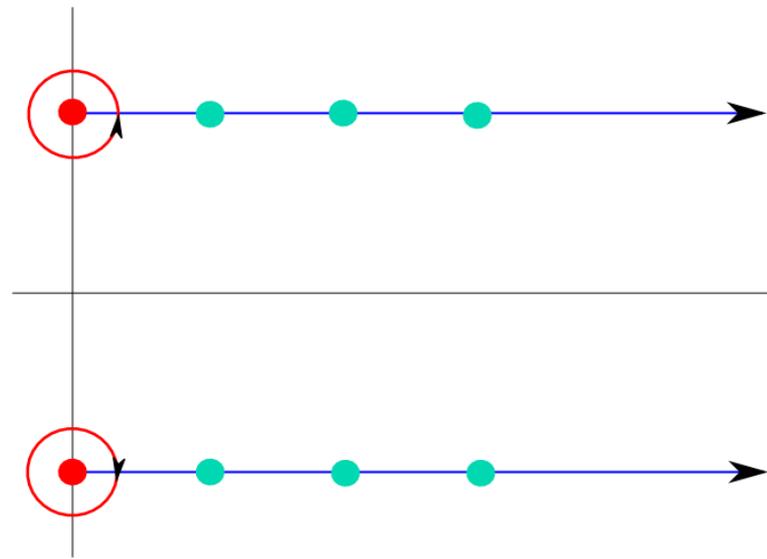
渦群の運動(17/24)

■ 2個の渦の運動

- 循環 $\Gamma_1 = \Gamma_2 (= \Gamma)$, 初期位置 $z_1(0) = a$, $z_2(0) = -a$
- 循環 $\Gamma_1 = \Gamma$, $\Gamma_2 = -\Gamma$, 初期位置 $z_1(0) = ia$, $z_2(0) = -ia$



円を描く



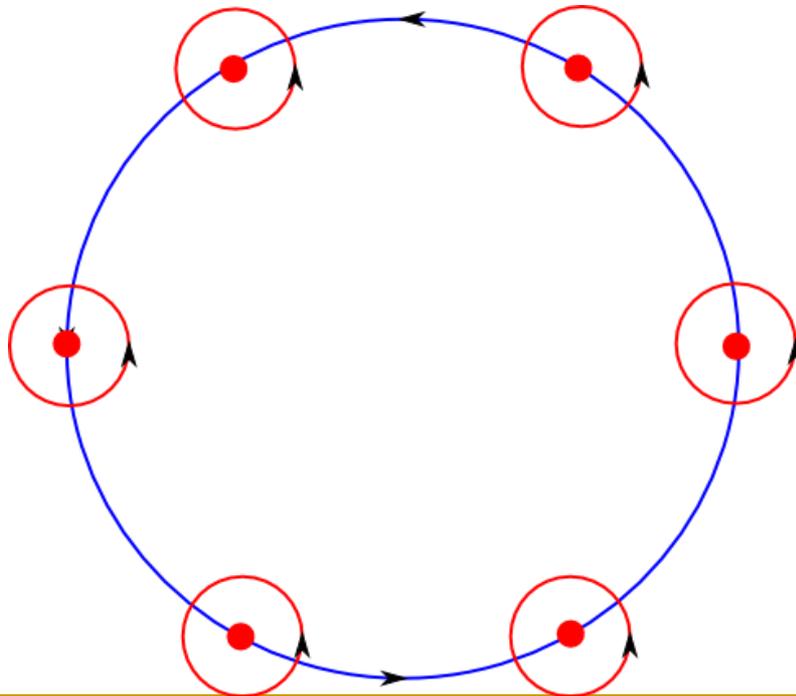
平行運動

渦群の運動(18/24)

循環 $\Gamma_1 = \dots = \Gamma_N$, 初期位置: 円周上に等間隔に配置.



円周上を一定の角速度で運動.



常微分方程式の数値解法(19/24)

■ 常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}), & t_{\text{init}} \leq t \leq t_{\text{end}} \\ \mathbf{u}(t_{\text{init}}) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

ここで,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(t, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ f_m(t, u_1, \dots, u_m) \end{bmatrix}.$$

常微分方程式の数値解法(20/24)

時間 $t_{\text{init}} \leq t \leq t_{\text{end}}$ を分割.

$$t_{\text{init}} = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N = t_{\text{end}},$$

$$\left. \begin{array}{l} t_n = t_0 + nh \\ \mathbf{u}_n \approx \mathbf{u}(t_n) \end{array} \right\} n = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{t_{\text{end}} - t_{\text{init}}}{N}.$$

Euler(オイラー)法

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \approx \frac{\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)}{h}.$$



$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{u}_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

常微分方程式の数値解法(21/24)

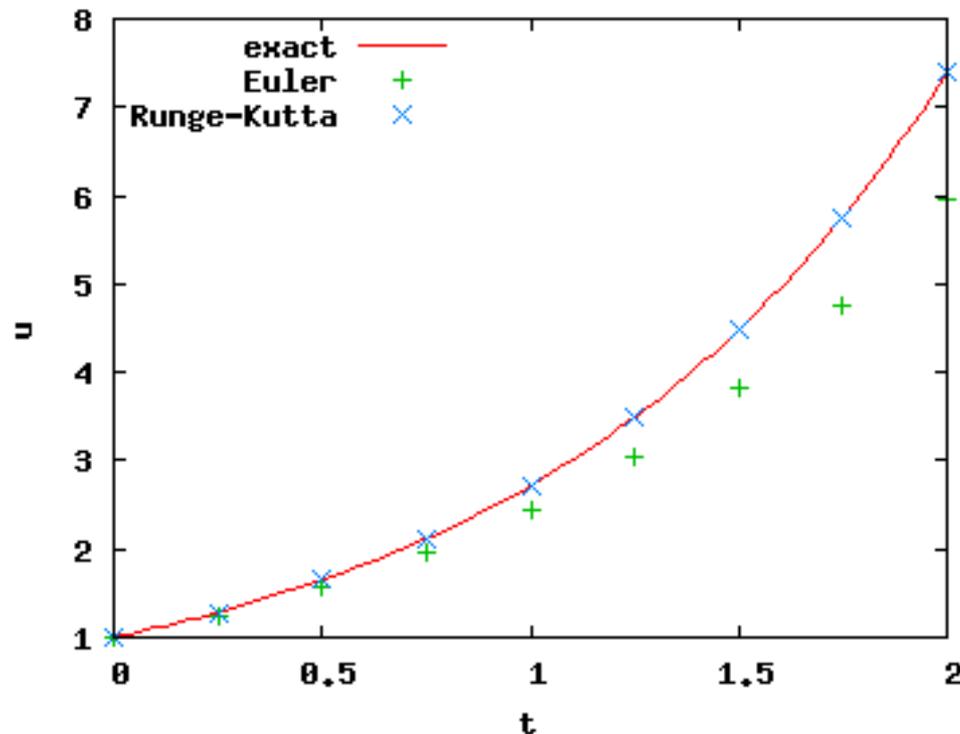
■ Runge-Kutta(ルンゲ・クッタ)法(4段4次)

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{u}_n) \\ \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{u}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right) \\ \mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{u}_n + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right) \\ \mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{u}_n + h\mathbf{k}_3) \end{cases}$$
$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4),$$
$$n = 0, 1, \dots, N-1.$$

常微分方程式の数値解法(22/24)

■ 数値例

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u & (0 \leq t \leq 2) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$



常微分方程式の数値解法(23/24)

- 近似誤差

$$\mathbf{e}_N = \mathbf{u}_N - \mathbf{u}(t_N) = \begin{cases} O(h) & \text{(Euler法)} \\ O(h^4) & \text{(Runge - Kutta法)} \end{cases}$$

実験の内容(24/24)

- 簡単な常微分方程式問題を数値解法で解く.
 - プログラミング
 - 誤差評価
- 渦群の運動の数値シミュレーション
- アニメーションの作成

第2日目以降は, 最初からCEDに行く.

- レポート
 - 紙のレポート & アニメーションGIF (電子メールに添付)
 - 締切り: 後で告知 (掲示に注意)