解析学・中間試験・解答

（担当）緒方秀教　(e-mail)ogata@im.uec.ac.jp

2016 年 12 月 5 日（月）実施

注意

- 試験時間は 60 分間である.
- 筆記用具以外の持ち込み不可.

第 1 問　次の関数の $x = 0$ における Taylor 級数展開を例に従って記せ.

$$(1)\ \cos x \quad (2)\ \sin x \quad (3)\ (1+x)^\alpha\ （\alpha \text{ は定数}） \quad (4)\ \log(1+x)$$

$$\textbf{例} \quad \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$(1)\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$

$$(2)\ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

$$(3)\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots$$

$$\left(\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n = 1, 2, \ldots) \right)$$

$$(4)\ \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

第 2 問　次のべき級数の収束半径を求めよ.

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) x^n \quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

$$(3)\ \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) x^n \quad (4)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!} \quad （合流型超幾何級数）$$

（注）Pochhammer の記号　$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

以下，収束半径を R と記す.

(1). $a_n = 2^n - 1$ と置くと，

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - 2^{-n}}{1 - 2^{-n}} = 2, \quad \therefore\ R = \frac{1}{2}.$$

(2). $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ と置くと，

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \quad \therefore\ R = \mathrm{e}^{-1}.$$

(3). $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ と置くと，

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to} \frac{\sqrt{1+n^{-1}}+1}{\sqrt{1+2n^{-1}}+\sqrt{1+n^{-1}}} = 1, \quad \therefore \quad R = 1.$$

(4). $a_n = \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n n!}$ と置くと，

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha+n)}{(\gamma+n)(n+1)} = 0, \quad \therefore \quad R = \infty.$$

第 3 問　k を $0 < k < 1$ なる定数とする．

1. $\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}}$ の $x=0$ における Taylor 級数展開を求めよ．
2. 第 1 種完全楕円積分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

を k のべき級数で表わせ．

以上の問題では，次の記号を用いてよい．

$$(2n)!! = (2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2, \quad (2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1, \quad 0!! = (-1)!! = 1.$$

また，次の公式を用いてよい．

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta \mathrm{d}\theta = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \quad (\ n = 1, 2, \ldots\ ).$$

1. 第 1 問 (3) を用いて，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} &= (1-k^2x^2)^{-1/2} \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-k^2x^2) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-k^2x^2)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(-k^2x^2)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} x^{2n}.\end{aligned}$$

2. (1) の結果より

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n}\theta.$$

この両辺を（項別）積分すればよい（右辺において，

$$\left|\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n}\theta\right| \leqq k^{2n} \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right), \quad \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} < \infty$$

であるから，Weierstrass の M-判定法により，右辺の級数は $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ で一様収束し，項別積分が可能である）．ヒントの公式を用いれば，ただちに

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right\}^2 k^{2n}$$

を得る．