

数値計算・講義資料—直交多項式—

(担当) 緒方秀教 (e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

2017年12月12日(火)

主な直交多項式に関してその性質等を列挙する. 詳細は [1, 2] などの数学公式集を参照すること.
なお, 直交多項式の定義は書籍によって異なることがあるので, 注意すること.

Legendre の多項式

$$\text{定義 } P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

$$\text{直交関係式 } \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \delta_{mn} \cdot \frac{2}{2n+1}.$$

$$\text{具体形 } P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

$$\text{漸化式 } nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0,$$

$$(x^2 - 1)P_n'(x) = n\{xP_n(x) - P_{n-1}(x)\} = (n+1)\{P_{n+1}(x) - xP_n(x)\}.$$

$$\text{母関数 } \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (-1 < x < 1, |t| < 1).$$

Chebyshev の多項式

$$\text{定義 } T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} (1-x^2)^{1/2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-1/2}.$$

$$\text{直交関係式 } \int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi/2 & (m = n \neq 0) \\ \pi & (m = n = 0). \end{cases}$$

$$\text{具体形 } T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

$$\text{漸化式 } T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0,$$

$$(1-x^2)T_n'(x) = nT_{n-1}(x) - nxT_n(x).$$

$$\text{母関数 } \frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = T_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n \quad (-1 < x < 1, |t| < 1).$$

Laguerre の多項式

定義 $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n).$

直交関係式 $\int_0^\infty e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \delta_{mn}.$

具体形 $L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2},$

$$L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}, \quad L_4(x) = 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{24}.$$

漸化式 $nL_n(x) + (x - 2n + 1)L_{n-1}(x) + (n - 1)L_{n-2}(x) = 0,$

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x).$$

母関数 $\frac{1}{1-t} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n \quad (|t| < 1).$

Hermite の多項式

定義 $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}.$

直交関係式 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_m(x) H_n(x) dx = \delta_{mn} \sqrt{2\pi} n!.$

具体形 $H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x, \quad H_2(x) = x^2 - 1,$

$$H_3(x) = x^3 - 3x, \quad H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3.$$

漸化式 $H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0,$

$$H'_n(x) = nH_{n-1}(x),$$

母関数 $e^{tx - t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$

参考文献

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun (eds.): Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, ninth printing, Dover, New York, 1970.

[2] 森口繁一, 宇田川久, 一松信: 岩波 数学公式集 III 特殊函数, 岩波書店, 1960年.