$$f(x) = e^x = \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(x-a)^n = e^a\left\{1 + (x-a) + \frac{1}{2!}(x-a)^2 + \cdots\right\}.$$

とくに $a=0$ とおけば,

$$e^x = \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots.$$

例 $f(x) = \cos x$.

$f(x)$ は $\mathbb{R}$ で C^∞ 級である. $g(x)=1$ とおけば定理の条件をみたす.
よって, 任意の $a \in \mathbb{R}$ で Taylor 級数展開可能である.
とくに $a=0$ の場合, $(\cos x)'|_{x=0} = \sin x|_{x=0} = 0$, $(\cos x)''|_{x=0} = -\cos x|_{x=0} = -1$,
$(\cos x)'''|_{x=0} = -\sin x|_{x=0} = 0$, $\cdots$ であるから,

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

同様にして,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

例 $f(x) = \log(1+x)$. ……これは p1 の定理を用いていない.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad (|x|<1).$$

右辺の収束半径は 1 だから, $|x|<1$ で項別積分可能.

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dy}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x y^n\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n.$$

$$\therefore\ \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots.$$

二項級数 ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (|x|<1),$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad (n=1,2,\cdots).$$

* $\alpha = m \in \mathbb{N}$ の場合は

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n = \sum_{n=0}^{m} {}_mC_n\, x^n. \quad \cdots \text{二項定理}.$$

∵ まず, $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ の収束半径は1である. 実際, $a_n = \binom{\alpha}{n}$ とおくと,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha - n|}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1-\alpha n^{-1}|}{1+n^{-1}} = 1$$

より, 収束半径 $=1$ である.

さて, 一般に, 開区間 I 上の n 回微分可能な関数 $f(x)$ に対し, $a \in I$ を固定すれば, 次が成り立つ:

$\forall x \in I,\ \exists \theta = \theta_x\ (0<\theta<1)$ s.t.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n,$$

$$R_n = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n. \quad (\#)$$

(証明は後述) $f(x) = (1+x)^\alpha$, $a=0$ とおけば,

$f^{(k)}(x) = k!\binom{\alpha}{k}(1+x)^{\alpha-k}$ であるから,

$\forall x \in (-1,1),\ \exists \theta = \theta_x\ (0<\theta<1)$ s.t.

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n, \quad \text{——①}$$

$$R_n = n\binom{\alpha}{n}(1+\theta x)^{\alpha-n}(1-\theta)^{n-1}x^n$$

$$= \alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1}$$

$\alpha \geqq 1$ のとき $|(1+\theta x)^{\alpha-1}| \leqq (1+|x|)^{\alpha-1}$, $\alpha<1$ のとき $|(1+\theta x)|^{\alpha-1} \leqq (1-|x|)^{\alpha-1}$

また, 明らかに $\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$. さらに二項級数は $|x|<1$ で収束するから, とくに

$$\lim_{n\to\infty}\left|\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1}\right| = 0$$

である．よって，$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ であり，①で $n\to\infty$ とすれば題意の等式を得る．

$\boxtimes$

*(#) の証明) $x\in I$ を任意に固定して，

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - K(x-t) \qquad (t\in I)$$

とおく．ただし，K は $F(\overset{a}{\cancel{x}})=0$ を満たすように定めた定数である．
$F(t)$ は1回微分可能で $F(x)=F(a)=0$ であるから，Rolleの定理より

$$\exists\,\theta=\theta_x\ (0<\theta<1)\ \text{s.t.}\ F'(a+\theta(x-t))=0.$$

$F'(t)$ を計算する．

$$F'(t) = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + K$$

$$= -\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + K.$$

$$0 = F'(a+\theta(x-a))$$

$$= -\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-a)^{n-1} + K$$

より，$K = \dfrac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-a)^{n-1}$ を得る．

$\boxtimes$

次のTaylor級数は覚えること：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (|x|<1),$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots \quad (\alpha\in\mathbb{R},\ |x|<1)$$

$$\left(\binom{\alpha}{0}=1,\ \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ (n=1,2,\cdots)\right).$$

KOKUYO