解析学・中間試験・解答

（担当）緒方秀教　(e-mail)ogata@im.uec.ac.jp

2017 年 12 月 11 日（月）実施

第 1 問　次の関数の $x=0$ における Taylor 級数展開を例に従って記せ.

(1) $\cos x$　(2) $\sin x$　(3) $(1+x)^\alpha$（α は定数）　(4) $\log(1+x)$

例　$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

$$(1)\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots ,$$

$$(2)\ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots ,$$

$$(3)\ (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots ,$$

$$(4)\ \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots .$$

第 2 問　次のべき級数の収束半径を求めよ.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$　(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \log n \, x^n$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n!(\gamma)_n} x^n$　（超幾何級数, α, β, γ は $0, -1, -2, \ldots$ でない定数，下記の（注）参照）

（注）Pochhammer の記号　$(a)_0 = 1$,　$(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)$　$(n = 1, 2, \ldots)$.

以下，題意のべき級数の係数を a_n と記す.

(1). $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{3} \to \frac{1}{3}$　$(n \to \infty)$ より，収束半径は 3.

(2). $\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}$　$(n \to \infty)$ より，収束半径は e^{-1}.

(3). $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\log(n+1)}{\log n} = 1 + \frac{\log(1+n^{-1})}{\log n} \to 1$　$(n \to \infty)$ より，収束半径は 1.

(4). $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{n(\gamma+n)} \right| = \left| \frac{(1+\alpha n^{-1})(1+\beta n^{-1})}{1+\gamma n^{-1}} \right| \to 1$　$(n \to \infty)$ より，
収束半径は 1.

第 3 問

1. $\sqrt{1-x}$ の $x=0$ における Taylor 級数展開を求めよ．

2. k を $|k|<1$ なる定数として，

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

を第 2 種完全楕円積分とよぶ．$E(k)$ を k のべき級数で表わせ．
なお，次の記号を用いてよい．

$$(2n)!!=(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2,\quad (2n+1)!!=(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1,\quad 0!!=(-1)!!=1.$$

そして，次の公式を用いてよい．

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}\quad (\,n=1,2,\dots\,).$$

(1).

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x}&=(1-x)^{1/2}\\&=1+\frac{1}{2}(-x)+\frac{1}{2!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(-x)^2+\frac{1}{3!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-x)^3\\&\quad+\frac{1}{4!}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(-x)^4+\cdots\\&=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2-\frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4\cdot 4!}x^4-\cdots\\&=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n.\end{aligned}$$

(2). (1) の結果に $x=k^2\sin^2\theta$ を代入して，

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\theta.$$

この両辺を θ について $0\leqq\theta\leqq\pi/2$ で積分する．その際，右辺において，

$$\left|\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}k^{2n}\sin^{2n}\theta\right|\leqq|k|^{2n}\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|k|^{2n}=\frac{|k|^2}{1-|k|^2}<\infty$$

であるから，Weierstrass の M 判定法により，右辺の級数は $0\leqq\theta\leqq\pi/2$ で絶対かつ一様収束する．よって，項別積分が可能であり，ヒントの公式を用いることにより，

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\left[1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!(2n-1)!!}{\{(2n)!!\}^2}k^{2n}\right]$$

を得る．