佐藤超函数論に基づく数値積分法
日本数学会 2016 年年会

* 緒方秀教 Hidenori Ogata（電気通信大学）
平山弘 Hiroshi Hirayama （神奈川工科大学）

2016 年 3 月

目次

目次

1. 佐藤超函数論：直感的定義

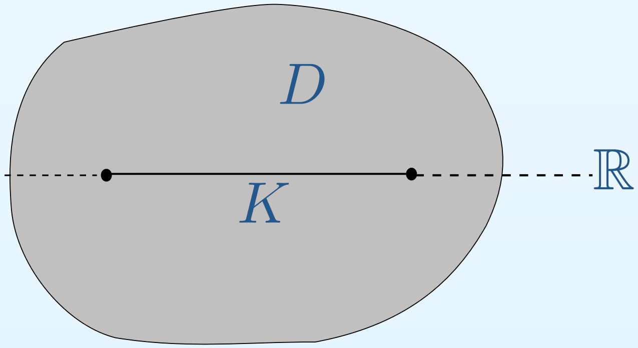
佐藤超函数の定義

複素解析関数 $F(z)$ **の境界値の差**として表される一般化関数 $f(x)$ を（**佐藤**）**超函数 (hyperfunction)** と呼ぶ：

$$f(x) = F(x + \mathrm{i}0) - F(x - \mathrm{i}0) = \lim_{\epsilon \to 0+} \{F(x + \mathrm{i}\epsilon) - F(x - \mathrm{i}\epsilon)\}. \quad (1)$$

$F(z)$ を $f(x)$ の**定義関数**と呼び，$f(x) = [F(z)]$ と記す.

$D \setminus K$ における解析関数 $F(z)$ に対し，K における値（境界値）から特異性を抽出したもの.



式 (1) はあくまでもシンボリックな表記.
極限が存在しないような点 x に対しては，超函数の値を定めない.

1. 佐藤超函数：例

- Dirac のデルタ関数

$$\delta(x) = \left[-\frac{1}{2\pi \mathrm{i} z}\right] = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x+\mathrm{i}0} - \frac{1}{x-\mathrm{i}0}\right).$$

- Heaviside のステップ関数

$$u(x) = \begin{Bmatrix} 1 & (\ x>0\ ) \\ 0 & (\ x<0\ ) \end{Bmatrix} = \left[-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\log(-z)\right].$$

$*$ $\log z$ は $-\pi \leqq \arg z < \pi$ なる主値をとるものとする.

- べき乗関数

$$x_+{}^{\alpha} = \begin{Bmatrix} x^{\alpha} & (\ x>0\ ) \\ 0 & (\ x<0\ ) \end{Bmatrix} = \left[-\frac{(-z)^{\alpha}}{2\mathrm{i}\sin(\pi\alpha)}\right] \quad (\ \alpha \notin \mathbb{Z} \quad \text{const.}\ ).$$

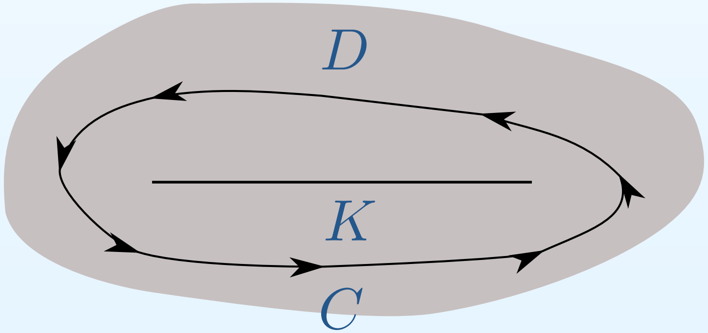
$*$ z^{α} は $-\pi \leqq \arg z < \pi$ なる主値をとることにする.

1. 佐藤超函数論

超函数 $f(x) = [F(z)]$ の積分

$$\int_K f(x)\mathrm{d}x \equiv -\oint_C F(z)\mathrm{d}z$$
$$= \int_K F(x+\mathrm{i}0)\mathrm{d}x - \int_K F(x-\mathrm{i}0)\mathrm{d}x$$

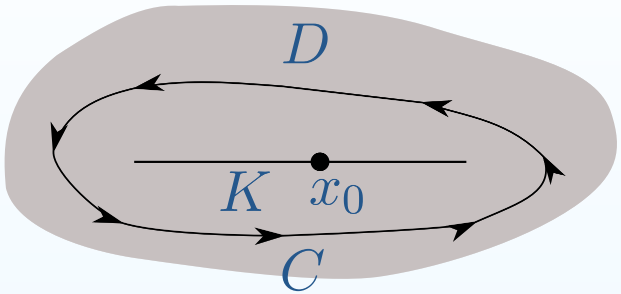
C : C を正の向きに囲む $D \setminus K$ 内の積分路.



- Cauchy の積分定理により，積分値は経路 C のとり方に依らない.

1. 佐藤超函数論：例

Dirac のデルタ関数



$$\delta(x-x_0) \equiv \left[-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}(z-x_0)} \right]$$

($x_0 \in \mathbb{R}$ const., $x_0 \in K$).

K 近傍で解析的な関数 $\phi(x)$ に対して，Cauchy の積分公式により，

$$\begin{aligned} \int_K \phi(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x &= -\oint_C \phi(z) \left\{ -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}(z-x_0)} \right\} \mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{\phi(z)}{z-x_0} \mathrm{d}z = \phi(x_0), \end{aligned}$$

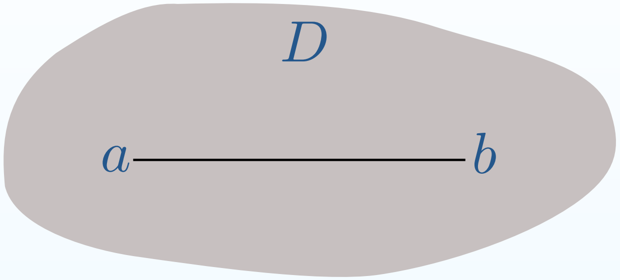
$$\therefore \quad \int_K \phi(x)\delta(x-x_0)\mathrm{d}x = \phi(x_0).$$

... 初等的なデルタ関数の定義を再現する．

目次

2. 有限区間積分に対する超函数法

$$I = \int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x,$$

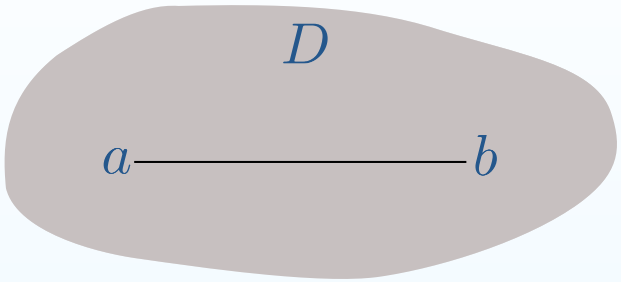


$f(x)$: 領域 D 上解析的 ($[a,b] \subset D \subset \mathbb{C}$),

$w(x)$: 重み関数.

2. 有限区間積分に対する超函数法

$$I = \int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x,$$



$f(x)$: 領域 D 上解析的 ($[a,b] \subset D \subset \mathbb{C}$),

$w(x)$: 重み関数.

被積分関数を超関数とみなす：

$$f(x)w(x)\chi_{a,b}(x) = \left[-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} f(z)\Psi(z)\right]$$

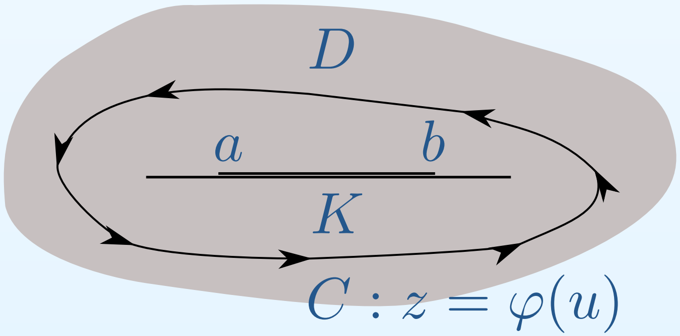
with $\quad \chi_{a,b}(x) = \begin{cases} 1 & x \in (a,b) \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}, \quad \Psi(z) = \displaystyle\int_a^b \frac{w(x)}{z-x}\mathrm{d}x.$

2. 有限区間積分に対する超函数法

超函数積分の定義から

$$\int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C f(z)\Psi(z)\mathrm{d}z.$$
$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{u_{\mathrm{period}}} f(\varphi(u))\Psi(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u,$$

$C\ :\ z = \varphi(u),\quad 0 \leqq u \leqq u_{\mathrm{period}}$　周期関数（周期 u_{period}）.



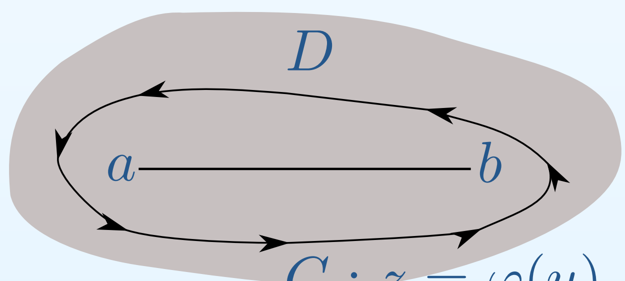
右辺を台形則で近似して…

2. 有限区間積分に対する超函数法

超函数法 (hyperfunction method)

$$I = \int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{h}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{N-1} f(\varphi(kh))\Psi(\varphi(kh))\varphi'(kh),$$

with $\quad \Psi(z) = \displaystyle\int_a^b \frac{w(x)}{z-x}\mathrm{d}x \quad$ and $\quad h = \dfrac{u_{\mathrm{period}}}{N}.$



$$C : z = \varphi(u), \quad 0 \leqq u \leqq u_{\mathrm{period}}$$

2. 有限区間積分に対する超函数法

超函数法 (hyperfunction method)

$$I = \int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{h}{2\pi\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{N-1} f(\varphi(kh))\Psi(\varphi(kh))\varphi'(kh),$$

with $\quad \Psi(z) = \displaystyle\int_a^b \frac{w(x)}{z-x}\mathrm{d}x \quad$ and $\quad h = \dfrac{u_{\mathrm{period}}}{N}$.

主な重み関数 $w(x)$ に対する関数 $\Psi(z)$

(a,b)	$w(x)$	$\Psi(z)$
(a,b)	1	$\log\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$
$(0,1)$	$x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$	$B(\alpha,\beta)z^{-1}F(\alpha,1;\alpha+\beta;z^{-1})$
	$(\ \alpha,\beta>0\ )$	

$*\ \log z$ は $-\pi \leqq \arg z < \pi$ なる主値を取る.

2. 有限区間積分に対する超函数法

超函数法の誤差評価

$f(\varphi(w)), \varphi(w)$ が複素帯状領域 $|\operatorname{Im} w| < d_0$ で解析的ならば,

$$
\begin{aligned}
|\,誤差\,| &\leqq 2u_{\mathrm{period}} \max_{\operatorname{Im} w = \pm d} |f(\varphi(w))\Psi(\varphi(w))\varphi'(w)| \\
&\quad \times \frac{\exp(-(2\pi d/u_{\mathrm{period}})N)}{1 - \exp(-(2\pi d/u_{\mathrm{period}})N)} \quad (\, 0 < \forall d < d_0 \,).
\end{aligned}
$$

超函数法の数値積分は，標本点数 $N \to \infty$ で**指数関数的に収束する.**

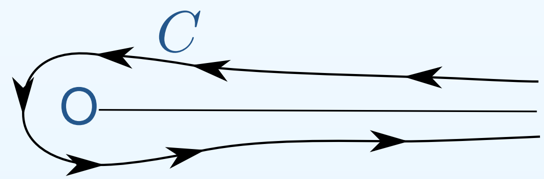
目次

1. 佐藤超函数論
2. 有限区間積分に対する超函数法
3. 半無限区間積分に対する超函数法
4. 数値例
5. まとめと今後の課題

3. 半無限区間積分に対する超函数法

半無限区間積分→超函数積分に翻訳して台形則近似.

$$\int_0^\infty f(x)w(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C f(z)\Psi(z)\mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(u))\Psi(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u \simeq \text{台形則（DE 公式）}.$$



C : 正の実軸を正の向きに囲む積分路

主な重み関数 $w(x)$ に対する $\Psi(z)$.

$w(x)$	1	$x^{\alpha-1}$ ($\alpha > 0$)
$\Psi(z)$	$\log(-z)$	$\dfrac{-\pi}{\sin(\pi\alpha)}(-z)^{\alpha-1}$

目次

4. 数値例 1：積分区間端点に特異性がある有限区間積分

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x = B(\alpha,\beta)F(\alpha;\alpha+\beta;1) \quad \alpha=\beta=10^{-4}.$$

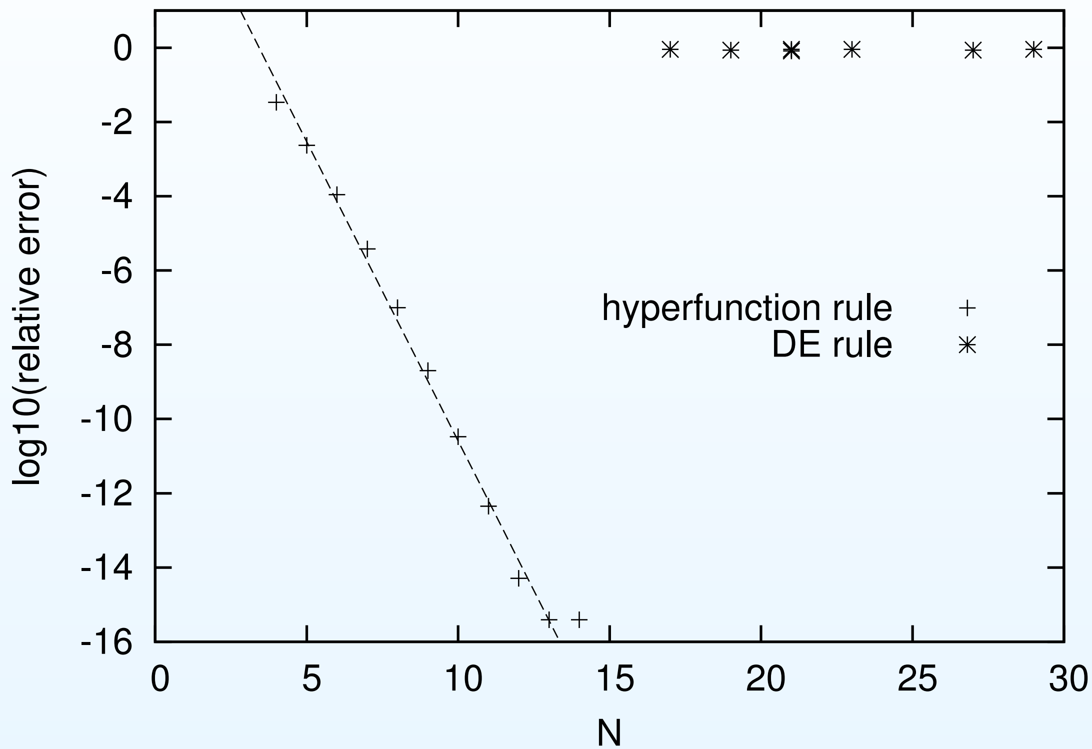
- 超函数法
- DE 公式

で数値積分を行い誤差を比較した.

- プログラム言語：C++，倍精度計算.
- 超函数法の複素積分路：

$$z = 0.5 + 2.575\cos u + \mathrm{i}2.425\sin u, \quad 0 \leqq u \leqq 2\pi \quad (\text{楕円}).$$

4. 数値例 1：積分区間端点に特異性がある有限区間積分



数値積分の相対誤差 ($\alpha = \beta = 10^{-4}$)

- 超函数法：誤差 $= \mathrm{O}(0.024^N)$（**指数関数的減衰**）.
- DE 公式：積分計算が全然できていない.

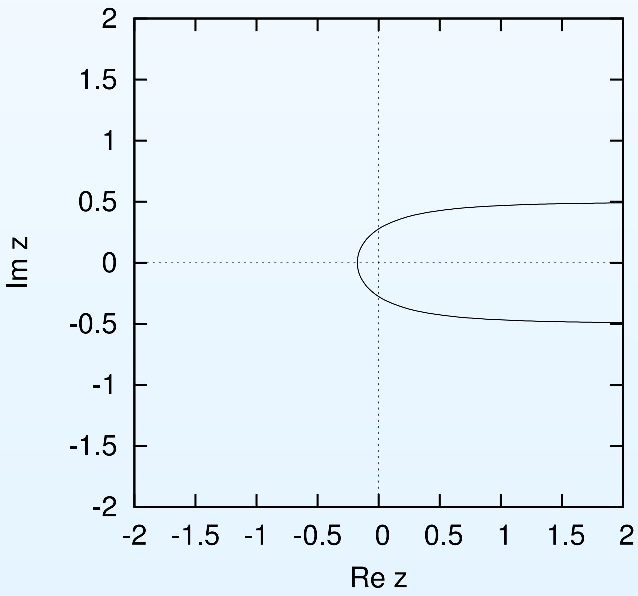
4. 数値例 2：積分区間端点に特異性がある半無限区間積分

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi/2}{\sin(\pi\alpha/2)} \quad (\,0<\alpha<1\,)$$

いくつかの α の値について超函数法・DE 公式で数値積分を行い，
誤差を比較した．

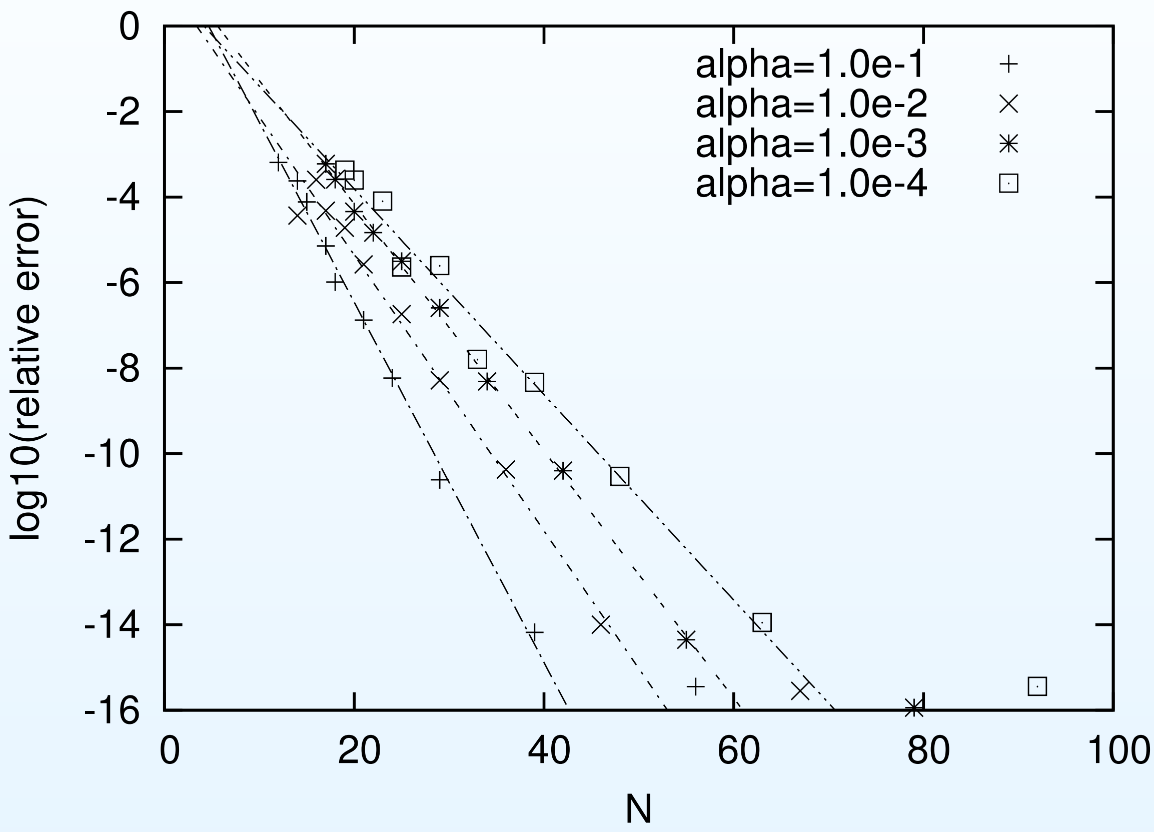
超函数法の複素積分路

$$z=\varphi(u+0.5\mathrm{i}),$$
$$\varphi(w)=\frac{w}{\mathrm{i}\pi}\log\left(\frac{1+\mathrm{i}w}{1-\mathrm{i}w}\right),$$
$$-\infty<u<+\infty.$$



4. 数値例 2：積分区間端点に特異性がある半無限区間積分

DE 公式の場合

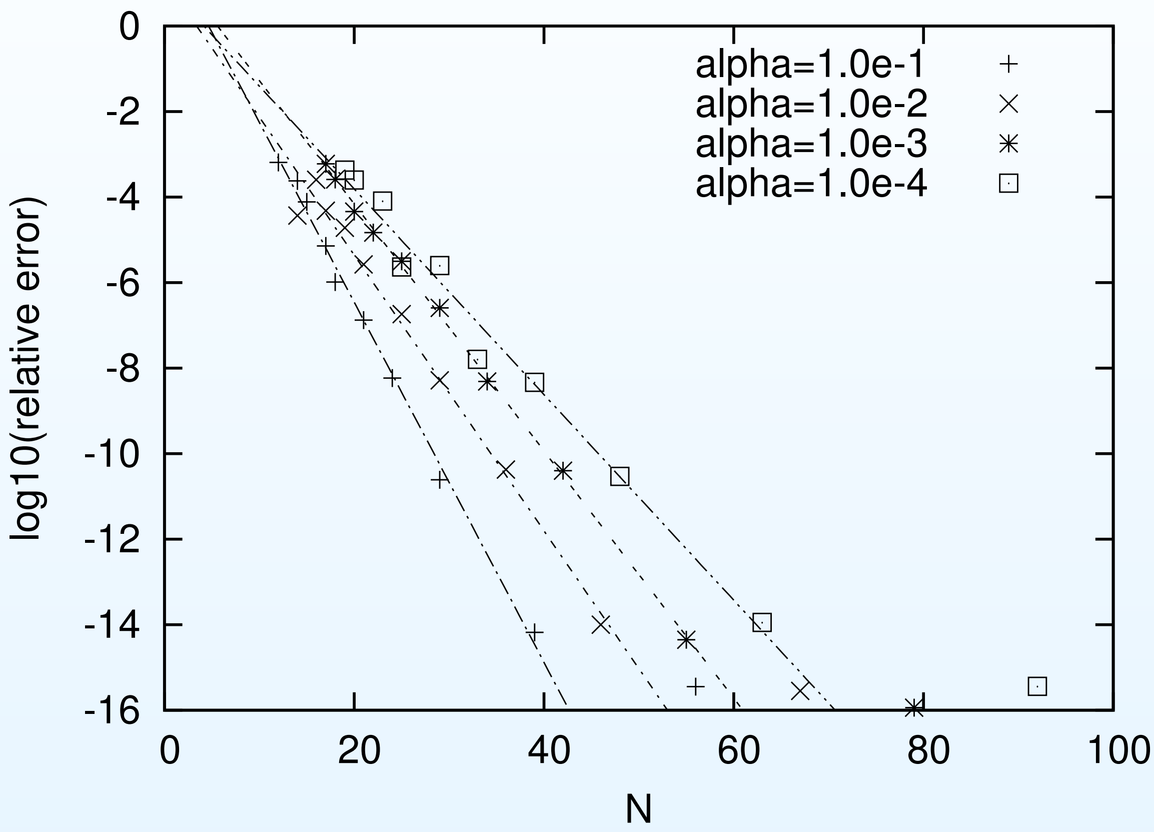


誤差の標本点数 N に対する変化

α	1.0×10^{-1}	1.0×10^{-2}	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-4}
誤差	$\mathrm{O}(0.38^N)$	$\mathrm{O}(0.48^N)$	$\mathrm{O}(0.51^N)$	$\mathrm{O}(0.57^N)$

4. 数値例 2：積分区間端点に特異性がある半無限区間積分

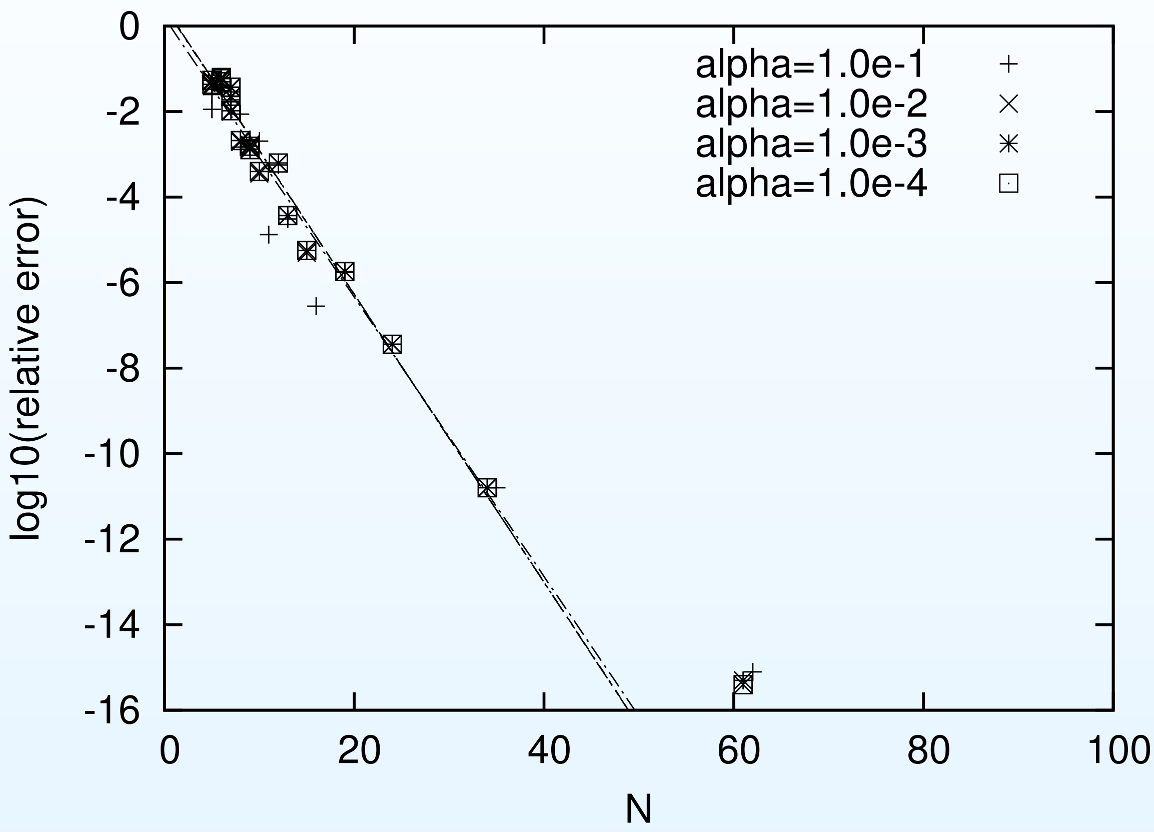
DE 公式の場合



DE 公式は端点特異性が強くなると，収束が遅くなる．

4. 数値例 2：積分区間端点に特異性がある半無限区間積分

超函数法の場合

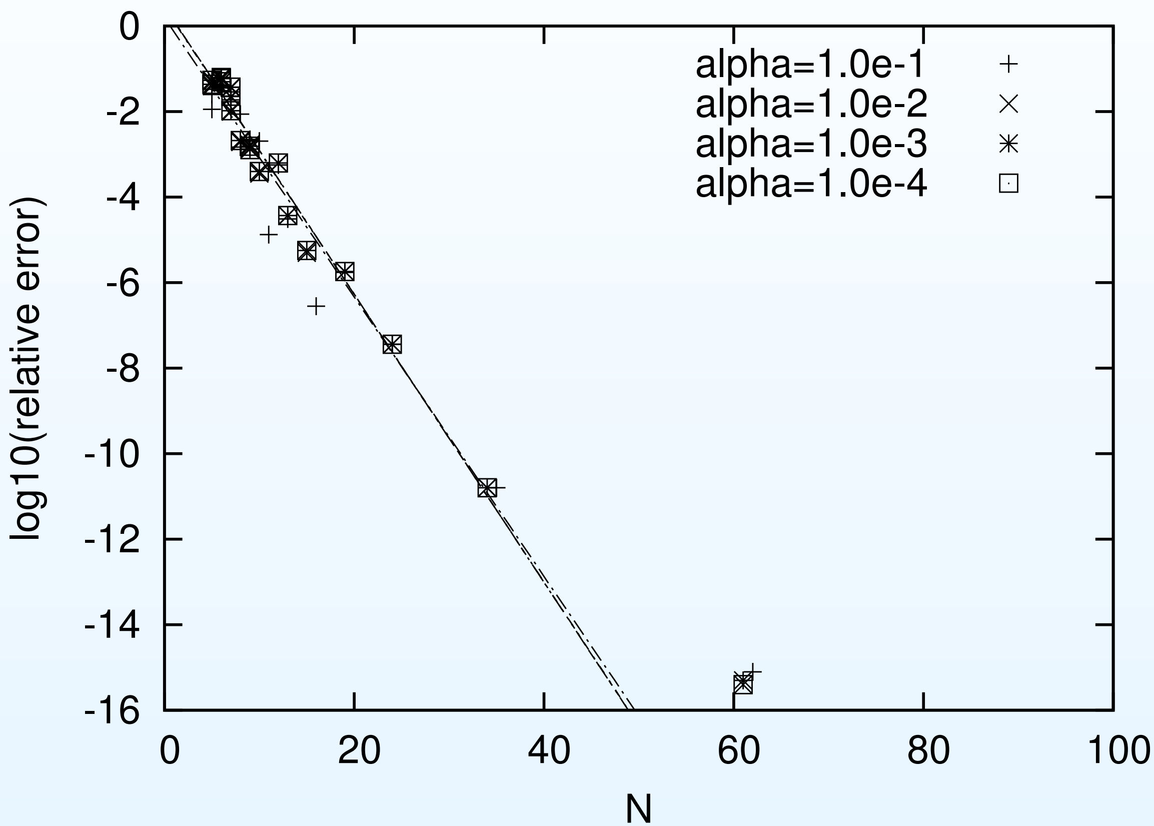


誤差の標本点数 N に対する変化

α	1.0×10^{-1}	1.0×10^{-2}	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-4}
誤差	$\mathrm{O}(0.47^N)$	$\mathrm{O}(0.46^N)$	$\mathrm{O}(0.46^N)$	$\mathrm{O}(0.46^N)$

4. 数値例 2：積分区間端点に特異性がある半無限区間積分

超函数法の場合



誤差の標本点数 N に対する変化

超函数法は端点特異性の強さが変化しても，影響を受けない．

目次

5. まとめと今後の課題

- 佐藤超函数 (hyperfunction)
  - 解析関数の境界値の差.
  - **解析関数の特異性を抽出したもの.**
- 超函数法は，**求める積分を超函数積分とみなして，それを定義する複素積分を直接近似計算**している.

5. まとめと今後の課題

- 佐藤超函数 (hyperfunction)
    - 解析関数の境界値の差.
    - **解析関数の特異性を抽出したもの.**
- 超函数法は，**求める積分を超函数積分とみなして，それを定義する複素積分を直接近似計算**している.

今後やりたいこと.

- 特異積分：Cauchy の主値，Hadamard の有限部分
- 積分変換（Laplace 変換，Fourier 変換，etc.）
- 積分方程式（Nyström 法）

Thank you!