連分数を用いた数値解析接続と Fourier 変換への応用

日本応用数理学会 2018 年度年会 OS「科学技術計算と数値解析」

緒方秀教

電気通信大学大学院　情報理工学研究科　情報・ネットワーク工学専攻

2018 年 9 月 5 日（木）

研究目的

1. Taylor 級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

で与えられた解析関数 $f(z)$ の解析接続の数値計算（連分数を使用）．

2. 前項の数値解析接続を Fourier 変換

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-2\pi \mathrm{i}\xi x)\mathrm{d}x.$$

の数値計算に応用する．

1. 解析接続：なぜ「連分数」を使うのか？

1. 解析接続：なぜ「連分数」を使うのか？

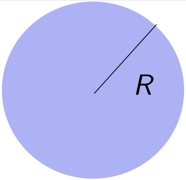
冪級数を連分数に変換すると，収束域が広がるから．

1. 解析接続：なぜ「連分数」を使うのか？

冪級数を連分数に変換すると，収束域が広がるから．

解析関数（Taylor 級数）

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$



収束円 $|z| < R$

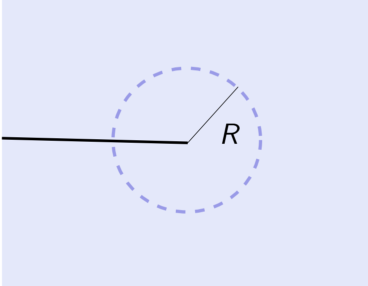
1. 解析接続：なぜ「連分数」を使うのか？

幕級数を連分数に変換すると，収束域が広がるから．

解析関数→連分数に変換

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

$$= \cfrac{a_1}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \cfrac{a_3 z}{1 + \ddots}}}$$



収束域
（カットの入った平面）

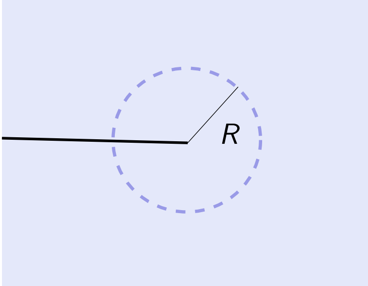
1. 解析接続：なぜ「連分数」を使うのか？

冪級数を連分数に変換すると，収束域が広がるから．

解析関数→連分数に変換

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

$$= \cfrac{a_1}{1 + \cfrac{a_2 z}{1 + \cfrac{a_3 z}{1 + \ddots}}}$$



収束域
（カットの入った平面）

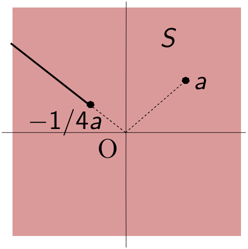
解析関数 $f(z)$ を連分数に変換することにより，
$f(z)$ の解析接続が得られると期待される．

1. 解析接続の数値計算：収束定理（指数関数的収束）

$$f(z) = \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2 z|}{|1} + \cdots, \quad a = \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$$

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \arg\left(z + \frac{1}{4a}\right) \neq \arg\left(-\frac{1}{4a}\right) \right\},$$

$T \subset S$ （任意のコンパクト部分集合）.



$$\Downarrow$$

任意の $\epsilon > 0$ に対し，$m \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|f_{m,n}(z) - f_m(z)| \leqq C(\theta_T + \epsilon)^n \quad (\forall n > m, \forall z \in T),$$

が成り立つ．ここで，

$$f_m(z) = \frac{a_m z|}{|1} + \frac{a_{m+1} z|}{|1} + \cdots, \quad f_{m,n}(z) = \frac{a_m z|}{|1} + \frac{a_{m+1} z|}{|1} + \cdots + \frac{a_n z|}{|1},$$

θ_T ： $0 < \theta_T < 1$， T のみによる定数.

1. 解析接続の数値計算：収束定理（指数関数的収束）

任意のコンパクト部分集合 $T \subset S$ に対し,

$$\text{誤差} \simeq \mathrm{O}({\theta_T}^n) \quad (\text{ in } T\ )$$ **指数関数的収束**.

定数 θ_T は次で与えられる：

$$\theta_T = \sup_{z \in T} \frac{|s_1(z)|}{|s_2(z)|},$$

ここで $s_{1,2}(z)$ は 2 次方程式

$$s^2 + s - az = 0$$

の根で

$$|s_1(z)| < |s_2(z)|$$

なるものである.

1. 解析接続の数値計算：連分数への変換（商差法）

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$ どうやって連分数に変換するか？

1. 解析接続の数値計算：連分数への変換（商差法）

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$ どうやって連分数に変換するか？

商差法　係数 $\{c_n\}$ から数列 $\{q_k^{(n)}\}, \{e_k^{(n)}\}$ を次で生成

$$e_0^{(n)} = 0, \quad q_1^{(n)} = c_{n+1}/c_n \quad (\, n = 0, 1, 2, \ldots\,),$$

$$e_k^{(n)} = q_k^{(n+1)} - q_k^{(n)} + e_{k-1}^{(n+1)}, \quad q_{k+1}^{(n)} = (e_k^{(n+1)}/e_k^{(n)})q_k^{(n+1)}$$

$$(\, n = 0, 1, \ldots;\; k = 1, 2, \ldots\,).$$

1. 解析接続の数値計算：連分数への変換（商差法）

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$ どうやって連分数に変換するか？

商差法　係数 $\{c_n\}$ から数列 $\{q_k^{(n)}\}, \{e_k^{(n)}\}$ を次で生成

$$e_0^{(n)} = 0, \quad q_1^{(n)} = c_{n+1}/c_n \quad (\, n = 0, 1, 2, \dots\,),$$

$$e_k^{(n)} = q_k^{(n+1)} - q_k^{(n)} + e_{k-1}^{(n+1)}, \quad q_{k+1}^{(n)} = (e_k^{(n+1)}/e_k^{(n)})q_k^{(n+1)}$$

$$(\, n = 0, 1, \dots;\ k = 1, 2, \dots\,).$$

$$f(z) = \frac{c_0|}{|1} - \frac{q_1^{(0)} z|}{|1} - \frac{e_1^{(0)} z|}{|1} - \frac{q_2^{(0)} z|}{|1} - \frac{e_2^{(0)} z|}{|1} - \cdots .$$

1. 解析接続の数値計算：連分数への変換（商差法）

$$
\begin{array}{ccccccccc}
e_0^{(0)}(=0) & & & & & & & & \\
 & q_1^{(0)}(=c_1/c_0) & & & & & & & \\
e_0^{(1)}(=0) & & e_1^{(0)} & & & & & & \\
 & q_1^{(1)}(=c_2/c_1) & & q_2^{(0)} & & & & & \\
e_0^{(2)}(=0) & & e_1^{(1)} & & e_2^{(0)} & & & & \\
 & q_1^{(2)}(=c_3/c_2) & & q_2^{(1)} & & q_3^{(0)} & & & \\
e_0^{(3)}(=0) & & e_1^{(2)} & & e_2^{(1)} & & e_3^{(0)} & & \\
 & q_1^{(3)}(=c_4/c_3) & & q_2^{(2)} & & q_3^{(1)} & & q_4^{(0)} & \\
e_0^{(4)}(=0) & & e_1^{(3)} & & e_2^{(2)} & & e_3^{(1)} & & \ddots
\end{array}
$$

$$
f(z) = \frac{c_0|}{|1} - \frac{q_1^{(0)}z|}{|1} - \frac{e_1^{(0)}z|}{|1} - \frac{q_2^{(0)}z|}{|1} - \frac{e_2^{(0)}z|}{|1} - \cdots .
$$

1. 解析接続の数値計算：連分数への変換（商差法）

$$
\begin{array}{ccccccccc}
e_0^{(0)}(=0) & & & & & & & & \\
 & q_1^{(0)}(=c_1/c_0) & & & & & & & \\
e_0^{(1)}(=0) & & e_1^{(0)} & & & & & & \\
 & q_1^{(1)}(=c_2/c_1) & & q_2^{(0)} & & & & & \\
e_0^{(2)}(=0) & & e_1^{(1)} & & e_2^{(0)} & & & & \\
 & q_1^{(2)}(=c_3/c_2) & & q_2^{(1)} & & q_3^{(0)} & & & \\
e_0^{(3)}(=0) & & e_1^{(2)} & & e_2^{(1)} & & e_3^{(0)} & & \\
 & q_1^{(3)}(=c_4/c_3) & & q_2^{(2)} & & q_3^{(1)} & & q_4^{(0)} & \\
e_0^{(4)}(=0) & & e_1^{(3)} & & e_2^{(2)} & & e_3^{(1)} & & \ddots
\end{array}
$$

商差法は数値的に不安定. $\Rightarrow$ 多倍長演算

2. Fourier 変換への応用

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}x.$$

- 科学技術計算で重要.
- 従来の数値積分公式では計算が困難
（とくに $f(x)$ が減衰の遅い関数の場合）.

2. Fourier 変換への応用

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ \int_{-\infty}^{0} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(\xi + \mathrm{i}\epsilon)x} \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(\xi - \mathrm{i}\epsilon)x} \mathrm{d}x \right\}.$$

収束因子 $\mathrm{e}^{-2\pi\epsilon|x|}$ （佐藤超函数論における Fourier 変換の定義）.

2. Fourier 変換への応用

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ \int_{-\infty}^{0} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(\xi + \mathrm{i}\epsilon)x} \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}(\xi - \mathrm{i}\epsilon)x} \mathrm{d}x \right\}.$$

収束因子 $\mathrm{e}^{-2\pi\epsilon|x|}$ （佐藤超函数論における Fourier 変換の定義）.

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \lim_{\epsilon \to 0+} \{F_+(\xi + \mathrm{i}\epsilon) - F_-(\xi - \mathrm{i}\epsilon)\} \quad (\, \xi \in \mathbb{R}\,),$$

$$F_+(\zeta) = \int_{-\infty}^{0} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\zeta x} \mathrm{d}x \quad \mathrm{Im}\,\zeta > 0 \text{ で解析的},$$

$$F_-(\zeta) = -\int_{0}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\zeta x} \mathrm{d}x \quad \mathrm{Im}\,\zeta < 0 \text{ で解析的}.$$

$F_\pm(\zeta)$ の $\mathbb{R}$ への**解析接続**により $\mathscr{F}[f](\xi)$ が計算できる.

3. Fourier 変換への応用

1. $F_{\pm}(\zeta)$ の Taylor 級数表示を $\pm\,\mathrm{Im}\,\zeta > 0$ で求める.

$$F_{\pm}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(\pm)} (\zeta - \zeta_0^{(\pm)})^n \quad (\,\pm\,\mathrm{Im}\,\zeta_0^{(\pm)} > 0\,),$$

$$c_n^{(\pm)} = \frac{1}{n!} F_{\pm}^{(n)}(\zeta_0^{(\pm)}) = \pm \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} (\pm 2\pi \mathrm{i} x)^n \underbrace{f(\mp x) \mathrm{e}^{\pm 2\pi \mathrm{i} \zeta_0^{(\pm)} x}}_{\text{指数関数的減衰}} \mathrm{d}x.$$

従来の数値積分公式で簡単に計算できる.

2. 解析接続により（連分数に変換して）$\mathscr{F}[f](\xi)$ を計算する.

$$\mathscr{F}[f](\xi) = \lim_{\epsilon \to 0+} \{ F_+(\xi + \mathrm{i}\epsilon) - F_-(\xi - \mathrm{i}\epsilon) \} \quad (\, \xi \in \mathbb{R} \,)$$

4. 数値例：数値解析接続

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \cdots \left(= \frac{\log(1+z)}{z} \right) \quad (\,|z| < 1\,),$$

の解析接続を本研究の方法で計算した．

計算環境（以下同じ）

- プログラミング言語：C++
- 多倍長演算（10 進 100 桁，ライブラリ *exflib* を使用）

4. 数値例：数値解析接続

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \cdots \left(= \frac{\log(1+z)}{z} \right) \quad (\,|z| < 1\,),$$

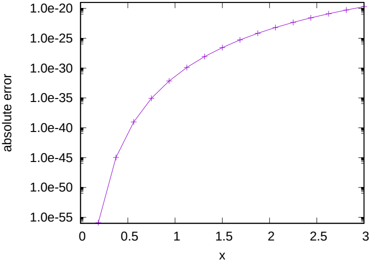
$$f(z) = \frac{a_1|}{|1} + \frac{a_2 z|}{|1} + \frac{a_3 z|}{|1} + \cdots,$$

n	a_n	n	a_n
1	1.0000 . . .	8	0.28571 42857 14285 . . .
2	0.5000 . . .	9	0.22222 . . .
3	0.16666 . . .	10	0.27777 . . .
4	0.33333 . . .	11	0.22727 27272 72727 . . .
5	0.20000 . . .	12	0.27272 72727 27272 . . .
6	0.30000 . . .	13	0.23076 92307 69230 . . .
7	0.21428 57142 85714 . . .	14	0.26923 07692 30769 . . .

4. 数値例：数値解析接続

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \cdots \left(= \frac{\log(1+z)}{z} \right) \quad (\,|z| < 1\,),$$

$0 < z = x < 3$ における解析接続の誤差



- 縦軸：絶対誤差
- 横軸：$x (= z)$

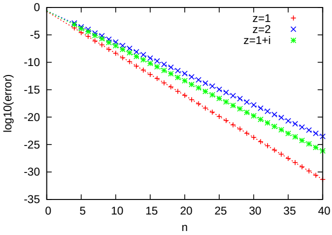
収束円 $|z| < 1$ 外で解析接続が高精度で計算されている．

4. 数値例：数値解析接続

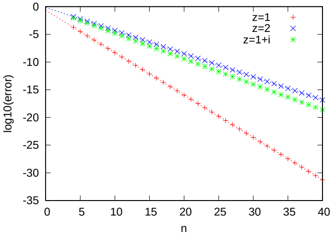
$$(1)\quad f(z) = 1 - z/2 + z^2/3 - \cdots (= z^{-1}\log(1+z)) \qquad (\,|z| < 1\,),$$

$$(2)\quad f(z) = z - z^3/3 + z^5/5 - \cdots (= \arctan z) \qquad (\,|z| < 1\,).$$

連分数を n 項で打ち切ったときの誤差（縦軸：$\log_{10}$(誤差)）．



(1)



(2)

n を大きくすると指数関数的に収束する．

4. 数値例：数値解析接続

$$\text{(1)} \quad f(z) = 1 - z/2 + z^2/3 - \cdots (= z^{-1}\log(1+z)) \qquad (\,|z| < 1\,),$$
$$\text{(2)} \quad f(z) = z - z^3/3 + z^5/5 - \cdots (= \arctan z) \qquad (\,|z| < 1\,).$$

連分数を n 項で打ち切ったときの誤差.

		誤差の減衰率		
$f(z)$		$z=1$	$z=2$	$z=1+\mathrm{i}$
(1)	実験	$\mathrm{O}(0.17^n)$	$\mathrm{O}(0.27^n)$	$\mathrm{O}(0.23^n)$
	理論	$\mathrm{O}(0.17^n)$	$\mathrm{O}(0.26^n)$	$\mathrm{O}(0.23^n)$
(2)	実験	$\mathrm{O}(0.17^n)$	$\mathrm{O}(0.38^n)$	$\mathrm{O}(0.35^n)$
	理論	$\mathrm{O}(0.17^n)$	$\mathrm{O}(0.38^n)$	$\mathrm{O}(0.35^n)$

実験値と理論値が一致している.

4. 数値例：数値解析接続（zeta 関数の計算）

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{f_s(1)}{1 - 2^{1-s}}, \quad \text{where} \quad f_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^s} z^n \quad (\,|z| < 1\,).$$

$f_s(1)$ を解析接続により計算する.

4. 数値例：数値解析接続（zeta 関数の計算）

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{f_s(1)}{1-2^{1-s}}, \quad \text{where} \quad f_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^s} z^n \quad (\,|z| < 1\,).$$

$f_s(1)$ を解析接続により計算する.

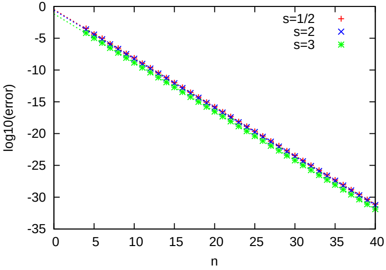
連分数展開を第 n 項で打ち切ったときの $\zeta(3)$ の計算値・誤差.

n	$\zeta(3)$ の計算値	誤差
5	1.2020 46303 07249	1.1e-05
10	1.2020 56904 61243	1.5e-09
15	1.2020 56903 15940	2.0e-13
20	1.2020 56903 15959	2.9e-17
	...	
厳密値	1.2020 56903 15959 ...	

4. 数値例：数値解析接続（zeta 関数の計算）

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{f_s(1)}{1-2^{1-s}}, \quad \text{where} \quad f_s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^s} z^n \quad (\,|z| < 1\,).$$

$f_s(1)$ を解析接続により計算する.
連分数展開を第 n 項で打ち切ったときの誤差.



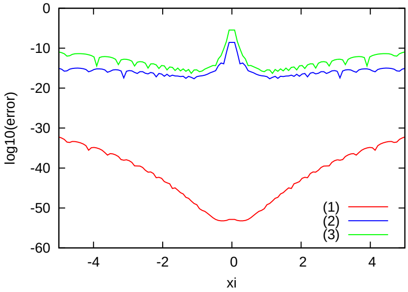
s	誤差	
	実験	理論
1/2	$\mathrm{O}(0.17^n)$	$\mathrm{O}(0.17^n)$
2	$\mathrm{O}(0.17^n)$	$\mathrm{O}(0.17^n)$
3	$\mathrm{O}(0.17^n)$	$\mathrm{O}(0.17^n)$

理論値と実験値が一致.

4. 数値例：Fourier 変換

次の Fourier 変換を本研究の方法で計算した．

$$(1)\ \mathscr{F}[\tanh(\pi x)](\xi), \quad (2)\ \mathscr{F}[(1+x^2)^{-2}](\xi), \quad (3)\ \mathscr{F}[\log|x|](\xi).$$



- 縦軸: $\log_{10}$(誤差)
- 横軸: ξ

4. 数値例：Fourier 変換，先行研究との比較

先行研究

1. DE 公式 & Richardson 補外 (M. Sugihara, 1987)
2. 振動積分に特化した DE 公式 (T. Ooura & M. Mori, 1991)

4. 数値例：Fourier 変換，先行研究との比較

先行研究

1. DE 公式 & Richardson 補外 (M. Sugihara, 1987)
2. 振動積分に特化した DE 公式 (T. Ooura & M. Mori, 1991)

$$\mathscr{F}[f](\xi) = -\mathrm{i}\,\mathrm{cosech}(\pi\xi), \quad f(x) = \tanh(\pi x), \quad \xi = 1.$$

		$f(x)$ の計算回数	誤差
	本方法	666	7.4×10^{-43}
(1)	DE & Richardson	17156	7.9×10^{-21}
(2)	振動積分に対する DE 公式	1892	1.5×10^{-46}

この数値例では本方法は先行 2 研究より結果が優れている．

まとめと今後の課題

1. 連分数を用いた解析関数の数値解析接続.
2. Fourier 変換計算への応用（zeta 関数の計算）
3. 数値例：本法の有効性を示した.

今後の課題

1. 事前誤差評価
   (現状 : 連分数を求めてみないと理論誤差評価ができない)
2. 連分数変換の低コスト化（商差法は多倍長演算を要する）.
3. zeta 関数 $\rightarrow$ Dirichlet の L 関数の計算, 級数の加速.

まとめと今後の課題

1. 連分数を用いた解析関数の数値解析接続.
2. Fourier 変換計算への応用（zeta 関数の計算）
3. 数値例：本法の有効性を示した.

今後の課題

1. 事前誤差評価
   (現状：連分数を求めてみないと理論誤差評価ができない)
2. 連分数変換の低コスト化（商差法は多倍長演算を要する）.
3. zeta 関数 $\to$ Dirichlet の L 関数の計算，級数の加速.

Thank you very much!