数値計算・講義資料

（担当）緒方秀教　(e-mail)`ogata@im.uec.ac.jp`

2018 年 10 月 2 日（火）

1. 計算機による数値表現

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 0.78539816\ldots \\ &\approx +\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^8} \;+\; \frac{1}{2^{13}}+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{2^{15}}+\frac{1}{2^{16}} \;+\; \frac{1}{2^{17}}+\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{2^{19}} \;+\; \frac{1}{2^{21}}+\frac{1}{2^{23}}+\frac{1}{2^{24}}\right)\times 2^0\end{aligned}$$

（2 進数）

$$= +\left(\frac{\mathrm{C}}{16}+\frac{9}{16^2}+\frac{\mathrm{F}}{16^4}+\frac{\mathrm{E}}{16^5}+\frac{\mathrm{B}}{16^6}\right)\times 16^0$$

（16 進数，A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15）.

		指数部 7 ビット		仮数部 24 ビット					
2 進数	0	100	0000	1100	1001	0000	1111	1110	1011
16 進数		4	0	C	9	0	F	E	B

図 1: 16 進 6 桁浮動小数点数による $\pi/4$ の表現．はじめの 1 ビットは符号を表す（$0=+, 1=-$）．指数部が $(1000000)_2$ となっているは，$-2^6=(-64)\sim 2^6-1(=63)$ を $0\sim 2^7-1(=127)$ にかさ上げしているからである．

2. 積分に対する台形則

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \simeq \frac{h}{2}f(a)+h\sum_{k=1}^{N-1}f(kh)+\frac{h}{2}f(b),\quad h=\frac{b-a}{N}$$

に対する丸め誤差の累積．積分

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}=0.78539\,81633\,97448\ldots$$

を台形則で倍精度計算し，その相対誤差を調べた．結果を下に記す．

```
          I(exact) = 7.853981633974483e-001
     N      h         I(trapezoidal rule)    error    log10(error)
-----------------------------------------------------------------------
     2 5.00000e-001 7.750000000000000e-001 1.324e-002 -1.878e+000
     4 2.50000e-001 7.827941176470589e-001 3.316e-003 -2.479e+000
     8 1.25000e-001 7.847471236227722e-001 8.289e-004 -3.081e+000
    16 6.25000e-002 7.852354030103472e-001 2.072e-004 -3.684e+000
    32 3.12500e-002 7.853574732937438e-001 5.181e-005 -4.286e+000
```

```
      64 1.56250e-002 7.853879908714134e-001 1.295e-005 -4.888e+000
     128 7.81250e-003 7.853956202659381e-001 3.238e-006 -5.490e+000
     256 3.90625e-003 7.853975276145704e-001 8.095e-007 -6.092e+000
     512 1.95313e-003 7.853980044517305e-001 2.024e-007 -6.694e+000
    1024 9.76563e-004 7.853981236610180e-001 5.059e-008 -7.296e+000

    2048 4.88281e-004 7.853981534633400e-001 1.265e-008 -7.898e+000
    4096 2.44141e-004 7.853981609139211e-001 3.162e-009 -8.500e+000
    8192 1.22070e-004 7.853981627765683e-001 7.905e-010 -9.102e+000
   16384 6.10352e-005 7.853981632422254e-001 1.976e-010 -9.704e+000
   32768 3.05176e-005 7.853981633586421e-001 4.941e-011 -1.031e+001

   65536 1.52588e-005 7.853981633877433e-001 1.236e-011 -1.091e+001
  131072 7.62939e-006 7.853981633950301e-001 3.079e-012 -1.151e+001
  262144 3.81470e-006 7.853981633968494e-001 7.625e-013 -1.212e+001
  524288 1.90735e-006 7.853981633972924e-001 1.985e-013 -1.270e+001
 1048576 9.53674e-007 7.853981633974174e-001 3.930e-014 -1.341e+001

 2097152 4.76837e-007 7.853981633974280e-001 2.587e-014 -1.359e+001
 4194304 2.38419e-007 7.853981633974507e-001 3.110e-015 -1.451e+001
 8388608 1.19209e-007 7.853981633974070e-001 5.259e-014 -1.328e+001
16777216 5.96046e-008 7.853981633975844e-001 1.733e-013 -1.276e+001
33554432 2.98023e-008 7.853981633973781e-001 8.934e-014 -1.305e+001
```

$N = 4194304$ ($h = 2^{-27}$) で相対誤差がマシンイプシロン程度になると，丸め誤差の累積の影響が現れ始め，これ以上刻み幅 h を小さくしても誤差は減少しない.

3. $f(x) = \sqrt{x}$ の $x = 2$ における数値微分を中心差分

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

で倍精度計算した．その結果を下記に記す.

```
x = 2.000000, f(x) = x^{1/2}
f'(x) (exact) = 3.535533905932737e-001
         h         f'(x) (numerical)      error
-------------------------------------------------
 1 5.00000e-001 3.563939586926008e-001 8.034e-003
 2 2.50000e-001 3.542486889354093e-001 1.967e-003
 3 1.25000e-001 3.537263197936396e-001 4.891e-004
 4 6.25000e-002 3.535965674160142e-001 1.221e-004
 5 3.12500e-002 3.535641813391095e-001 3.052e-005
   ...
15 3.05176e-005 3.535533906033379e-001 2.847e-011
```

```
16 1.52588e-005 3.535533905960619e-001 7.886e-012
17 7.62939e-006 3.535533905960619e-001 7.886e-012
18 3.81470e-006 3.535533905960619e-001 7.886e-012
19 1.90735e-006 3.535533905378543e-001 1.567e-010
20 9.53674e-007 3.535533905960619e-001 7.886e-012
21 4.76837e-007 3.535533905960619e-001 7.886e-012
22 2.38419e-007 3.535533905960619e-001 7.886e-012
23 1.19209e-007 3.535533910617232e-001 1.325e-009
24 5.96046e-008 3.535533901304007e-001 1.309e-009
25 2.98023e-008 3.535533882677555e-001 6.578e-009
26 1.49012e-008 3.535533919930458e-001 3.959e-009
27 7.45058e-009 3.535533994436264e-001 2.503e-008
28 3.72529e-009 3.535533845424652e-001 1.711e-008
29 1.86265e-009 3.535533547401428e-001 1.014e-007
30 9.31323e-010 3.535534143447876e-001 6.718e-008
```

$h = 2^{-20}$ あたりから桁落ちの影響が現れ始め，これ以上刻み幅 h を小さくしても誤差は減衰しない.