数値計算・講義資料—補間—

（担当）緒方秀教 (e-mail) `ogata@im.uec.ac.jp`

2018 年 11 月 27 日（火）4 限

定理 1 (等間隔標本点 Lagrange 補間の誤差 [1]) 区間 $[-1,1]$ 上の関数 $f(x)$ に対する n 点 *Lagrange* 補間 $f_n(x)$ について，

$$\|f-f_n\| = \max_{-1\leqq x\leqq 1} |f(x)-f_n(x)|$$

とおく．$f(z)$ が複素平面内の閉曲線

$$\mathcal{A}(\rho) = \left\{ z\in\mathbb{C} \;\middle|\; \left|\frac{(z+1)^{z+1}}{(z-1)^{z-1}}\right| = (2\rho)^2 \right\} \quad (\,\rho>1\,)$$

（図 *1* 参照）およびその内部を含む複素領域で正則ならば，

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|f-f_n\|^{1/n} \leqq \rho^{-1}$$

が成り立つ． □

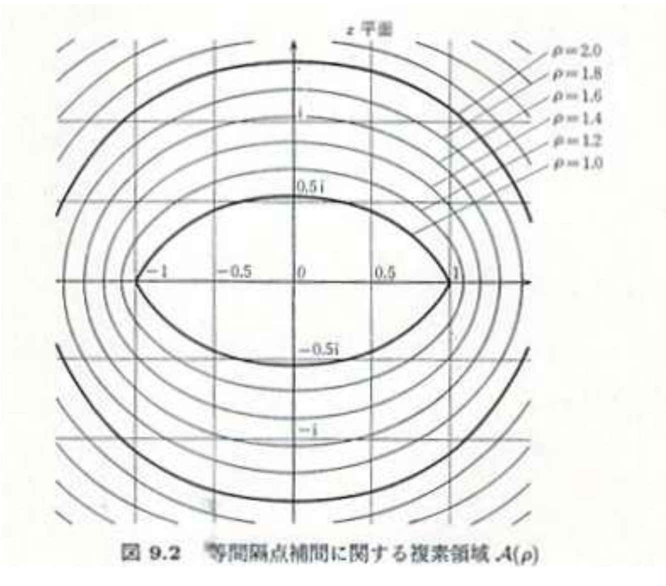

図 1: 複素領域 $\mathcal{A}(\rho)$（[1] より引用）.

関数

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \quad (\,-1\leqq x\leqq 1\,)$$

は $z=\pm\mathrm{i}/5$ に極を持ち，それはいかなる $\rho\geqq 1$ に対しても，複素閉曲線 $\mathcal{A}(\rho)$ 内部に含まれる．したがって，$f(x)$ は定理 1 の条件を満たさない．図 2 は関数 $f(x)$ に対し 33 点等間隔標本点 Lagrange 補間および Chebyshev 補間を行った結果を示す．等間隔標本点 Lagrange 補間では Runge の現象，すなわち，区間 $[-1,1]$ 端点近傍で激しい振動が起きていることがわかる．

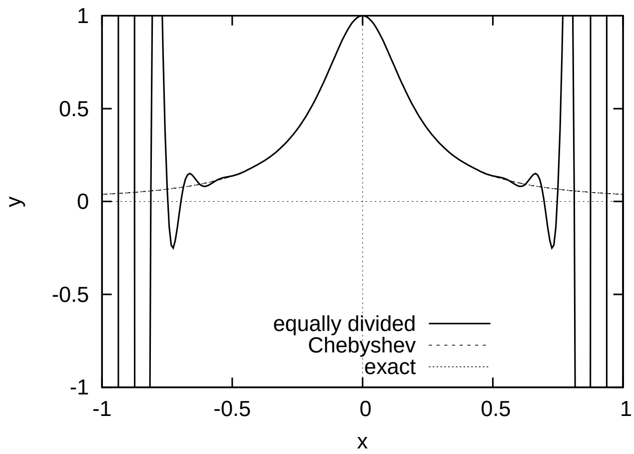

図 2: 等間隔標本点 Lagrange 補間における Runge の現象．Chebyshev 補間.

参考文献

[1] 杉原正顯，室田一雄：数値計算法の数理，岩波書店，1994 年.