電気通信大学 試験答案用紙

授業科目	解析学	施行月日	2018年12月3日 月曜日 第2時限	昼・夜の別	入学年度	学年	類・学科(略号)	ふりがな		★評点
						1				
				クラス番号	5 クラス 番			氏名		
担当教員	緒方	座席	教室 番	学籍番号						

(注意) ★印を除き必ず記入すること。1年生は、クラス番号も記入すること。 (学籍番号は全桁記入すること)

第1問 以下, c_1, c_2 は任意定数とする.

(1) $y=e^{\lambda x}$ とおいて代入すると, $\lambda^2+4\lambda+3=(\lambda+1)(\lambda+3)=0$, $\lambda=-1,-3$.
よって, 基本解 e^{-x}, e^{-3x} を得る. ∴ $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}$.

(2) $y=e^{\lambda x}$ とおいて代入すると, $\lambda^2+6\lambda+10=0$, $\lambda=-3\pm i$
よって, 基本解 $e^{(-3+i)x}, e^{(-3-i)x}$ を得る. $y=c_1e^{(-3+i)x}+c_2e^{(-3-i)x}$.
Eulerの公式より $y=e^{-3x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$.

(3) $y=e^{\lambda x}$ とおいて代入すると, $\lambda^2+8\lambda+16=(\lambda+4)^2=0$, $\lambda=-4$ (重解).
よって基本解 e^{-4x}, xe^{-4x} を得る. ∴ $y=e^{-4x}(c_1+c_2x)$.

(4) 斉次形 $y''+y=0$ の一般解は $y=c_1\cos x+c_2\sin x$.
特解を山辺の方法により求める.
$(1+D^2)y=x^2+3$.
右の筆算より $y=x^2+1$ を得る.
∴ $y=c_1\cos x+c_2\sin x+x^2+1$.

$$\begin{array}{r|ll}
 & x^2 & +1 \\ \hline
1+D^2 & x^2 & +3 \\
 & x^2 & +2 \\ \hline
 & & 1 \\
 & & 1 \\ \hline
 & & 0
\end{array}$$

第2問 斉次形 $y''+y=0$ の一般解は $y=c_1\cos x+c_2\sin x$ (c_1, c_2:任意定数).
特解を定数変化法により $y=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$ の形で求める. ただし,
$c_1'(x)\cos x+c_2'(x)\sin x=0$ であるとする.

$y'=-c_1\sin x+c_2\cos x+c_1'\cos x+c_2'\sin x=-c_1\sin x+c_2\cos x$,

$y''=-c_1\cos x-c_2\sin x-c_1'\sin x+c_2'\cos x$, $y''+y=-c_1'\sin x+c_2'\cos x$.

$$\begin{cases} c_1'\cos x+c_2'\sin x=0 \\ -c_1'\sin x+c_2'\cos x=\cot x \end{cases}$$

$c_1'(x), c_2'(x)$ について解くと

$c_1'(x)=-\sin x\cot x=-\cos x$,

$c_2'(x)=\cos x\cot x=\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}=\dfrac{1}{\sin x}-\sin x$.

$c_1(x)=-\sin x$, $c_2(x)=\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}+\cos x=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\cos x$.

よって, 特解 $y=-\sin x\cos x+\sin x\left\{\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\cos x\right\}=\sin x\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$ を得る.

∴ $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\sin x\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

(裏面は※印の箇所から書始めること。)

第3問 斉次形 $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0{}^2x=0$ の一般解は $y=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t$.

特解を求める. $\omega\neq\omega_0$ の場合, 明らかに $x=C\cos\omega t$ (C:定数) の形の特解をもつ.

$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0{}^2x=(\omega_0{}^2-\omega^2)C\cos\omega t=A\cos\omega t$ より $C=\frac{A}{\omega_0{}^2-\omega^2}$, $y=\frac{A}{\omega_0{}^2-\omega^2}\cos\omega t$.

$\omega=\omega_0$ の場合, $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0{}^2x=Ae^{i\omega_0 t}$ の特解を求め, その実部をとればよい.

$x=e^{i\omega_0 t}z(t)$ とおくと,

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0{}^2x=e^{i\omega_0 t}\left(\frac{d^2z}{dt^2}+2i\omega_0\frac{dz}{dt}-\omega_0{}^2z\right)+e^{i\omega_0 t}\omega_0^2z$$
$$=e^{i\omega_0 t}\left(\frac{d^2z}{dt^2}+2i\omega_0\frac{dz}{dt}\right)=Ae^{i\omega_0 t},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}+2i\omega_0\frac{dz}{dt}=A.$$

これは特解 $z(t)=\frac{A}{2i\omega_0}t$ をもつ. $x(t)=\frac{A}{2i\omega_0}te^{i\omega_0 t}$. 実部をとって $x(t)=\frac{A}{2\omega_0}t\sin\omega_0 t$.

(答) $$x(t)=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t+\begin{cases}\frac{A}{\omega_0{}^2-\omega^2}\cos\omega t & (\omega\neq\omega_0)\\ \frac{A}{2\omega_0}t\sin\omega_0 t & (\omega=\omega_0).\end{cases}$$