解析学・期末試験・解答

（担当）緒方秀教 (e-mail) ogata@im.uec.ac.jp

2019 年 2 月 18 日（月）2 限

- 試験時間は 60 分．筆記用具以外の持ち込み不可．
- 解答用紙 1 枚．計算用紙 1 枚．

第 1 問　強制振動を受ける調和振動子の運動方程式は，時刻 t における変位 $x(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 x = A \sin \omega t$$

で与えられる（ω, ω_0, A は正の定数）．この運動方程式の初期条件

$$x(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0$$

のもとでの解を求めよ．

斉次方程式 $\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$ の一般解は，$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$ （C_1, C_2 は定数）である．もとの運動方程式の解を，$\omega \neq \omega_0$ と $\omega = \omega_0$ の場合に分けて求める．

- $\omega \neq \omega_0$ の場合．明らかに $x = C \sin \omega t$ （C は定数）の形の特解を持つ．これを運動方程式に代入して，$C(-\omega^2 + {\omega_0}^2) \sin \omega t = A \sin \omega t, \quad \therefore \quad C = A/({\omega_0}^2 - \omega^2)$. よって，運動方程式の一般解は

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{A}{{\omega_0}^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (C_1, C_2 \text{ は定数}).$$

  初期条件より C_1, C_2 を定めて，

$$x(t) = \frac{A}{{\omega_0}^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right).$$

- $\omega = \omega_0$ の場合．方程式 $\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$ の特解を求めて虚部を取ればよい．$x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} z(t)$ とおくと，$\dot{x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}(\dot{z} + \mathrm{i}\omega_0 z), \quad \ddot{x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}(\ddot{z} + 2\mathrm{i}\omega_0 \dot{z} - {\omega_0}^2 z)$ により $\ddot{z} + 2\mathrm{i}\omega_0 \dot{z} = A$. これは特解 $z(t) = At/(2\mathrm{i}\omega_0)$ をもつ．よって，特解 $x = (At/(2\mathrm{i}\omega_0))\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$ を得る．虚部をとって，$x = -(A/(2\omega_0)) t \cos \omega_0 t$. したがって，運動方程式の一般解は

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t - \frac{A}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t \quad (C_1, C_2 \text{ は定数}).$$

  初期条件より C_1, C_2 を定めて，

$$x(t) = \frac{A}{2\omega_0} \left(-t \cos \omega_0 t + \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right).$$

第 2 問　次のべき級数の収束半径を求めよ．

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n^2}x^n,\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}x^n,\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}x^n,\quad (4)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}x^n,$$

ただし，(4) において，α,β,γ は $\alpha,\beta,\gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$ なる定数，

$$(\alpha)_0=1,\quad (\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)\quad (\,n=1,2,\ldots\,)$$

などとする．

以下，題意のべき級数を $\sum c_n x^n$, 収束半径を R と記す．

(1). Cauchy の判定法を使う． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=\mathrm{e}^{-2}$ により，$R=\mathrm{e}^2$.

(2). d'Alembert の判定法を使う． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n}=\frac{1}{4}$ により $R=4$.

(3). d'Alembert の判定法を使う．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\log(1+n^{-1})}{\log n}\right)=1$$

により，$R=1$.

(4). d'Alembert の判定法を使う． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{n(\gamma+n)}\right|=1$ により $R=1$.

第 3 問

1. 次が成り立つことを示せ．

$$\int_0^x \log(1+x')\mathrm{d}x'=(1+x)\log(1+x)-x.$$

2. $(1+x)\log(1+x)-x$ の $x=0$ における Taylor 級数を求めよ．そして，収束半径を求めよ．

3. 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$ は収束する．何故か？

4. Abel の定理を用いて前問の無限級数の値を求めよ．

   （Abel の定理）$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ を収束半径 1 のべき級数とし，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ は収束するとする．このとき，

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

   が成り立つ．

1. 部分積分により

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \log(1+x')\mathrm{d}x' &= \int_0^x (1+x')' \log(1+x')\mathrm{d}x' \\
&= \Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_{x'=0}^{x} - \int_0^x (1+x')\{\log(1+x')\}'\mathrm{d}x' \\
&= (1+x)\log(1+x) - \int_0^x \mathrm{d}x' \\
&= (1+x)\log(1+x) - x.
\end{aligned}
$$

2. $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ を項別積分することにより，

$$
(1+x)\log(1+x) - x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} x^{n+1}.
$$

d'Alembert の判定法を用いれば，収束半径が 1 であることがわかる．

3. 交代級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$ は，c_n が単調減少し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ であるから，Leibniz の定理により収束する．

（別解 1）$\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\right| \leqq \dfrac{1}{n^2}$ であり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(= \frac{\pi^2}{6}\right)$ は有限値に収束することが（$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 1 < \infty$ であることから）わかっているので，題意の級数は絶対収束する，ゆえに，収束する．

（別解 2）

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{N+1} \to 1 \quad (\, N \to \infty \,)
\end{aligned}
$$

であるから，題意の級数は絶対収束する，ゆえに，収束する．

4. 前々問のべき級数は収束半径 1 であり，前問の無限級数は収束するから，Abel の定理が適用できる．よって，

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} = \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1} = \lim_{x\to 1-0} \{(1+x)\log(1+x) - x\} = 2\log 2 - 1.
$$