2019/10/

常微分方程式

1. 微分方程式

常微分方程式 (ordinary differential equations, ODE)

$$F(x, y, y', y'', \cdots) = 0$$

一変数関数 $y = y(x)$ に対する方程式

* 偏微分方程式 (partial differential equations, PDE)

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \cdots\right) = 0$$

多変数関数 $u = u(x, y)$ に対する方程式

e.g. Newton 運動方程式 (1次元)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

$x = x(t)$: 変位, m : 質量, f : 外力. □

自励系 : $F(y, y', y'', \cdots) = 0$　独立変数 x を含まない.

正規系 : $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right)$, …

e.g. 1　$y' = 3x^2 - x + 1$

解　$y = x^3 - \dfrac{x^2}{2} + x + c$　(c : 任意定数)

2019/10/

e.g. 2 $y' = ay$ (a: const)

解: $y = Ce^{ax}$ (C: 任意定数)

一般の ODE の解は任意定数をいくつか含む.

初期条件 → 任意定数を決定

初期値問題 (initial value problem)

$$\begin{cases} F\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \quad \cdots \text{初期条件} \end{cases}$$

e.g.

$$\begin{cases} y' = ay \quad (a : \text{const}) & \text{— ①} \\ y(0) = 1 & \text{— ②} \end{cases}$$

① の解 $y = Ce^{ax}$ (C: 任意定数)

② より $y(0) = C = 1$. $\therefore\ y = e^{ax}$ □

2019/10/7

2. 変数分離形

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y)$$

$$\begin{cases} f(x) : \text{ある区間 } I \text{ 上の } x \text{ のみの関数} \\ g(x) : \text{ある区間 } J \text{ 上の } y \text{ のみの関数} \end{cases}$$

e.g. $y' = (8x^2+1)(y^2+1)$, $y' = e^{x+y}$, etc.

変数分離形でない : $y' = \cos(xy) + 2$ etc.

<解法> (1) まず, $g(y_0) = 0$ なる y_0 が存在すれば

$y(x) \equiv y_0 \ (x \in I)$ は解のひとつ …自明な定数解

(2) $g(y) \neq 0 \ (\forall y \in J)$ の場合,

$$\frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(x),$$

$$\int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx}\, dx = \int f(x)\, dx,$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx$$

両辺の不定積分を求める → 解.

→ はじめから dx, dy をあたかも独立した量であると思って

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx,$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx$$

と計算してよい.

2019/10/

e.g. $y' = a(\sin x)y \quad (a : \text{const})$.

(解) まず, $y \equiv 0$ は自明解がある.

$$\frac{dy}{y} = a \sin x \, dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int a \sin x \, dx$$

$$\log|y| (+c') = -a\cos x + c \quad ((c, c') : \text{任意定数})$$

$$|y| = e^{c} e^{-a\cos x},$$

$$y = Ce^{-a\cos x}, \quad C = \pm e^{c} \neq 0 : \text{const}.$$

$C = 0$ とおいた場合が自明解 $y \equiv 0$ に対応する.

(解) $y = Ce^{-a\cos x}$ (C : 任意定数). □

e.g. (p55) $yy' = 1 + x$.

(解) 自明解は存在しない.

$$y\,dy = (1+x)\,dx, \quad \int y\,dy = \int (1+x)\,dx,$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(1+x)^2 + \text{const},$$

$$\therefore \quad y^2 = (1+x)^2 + C \quad (C : \text{任意定数})$$

たとえば初期条件 $y(0) = 1$ を課すと, $1 = 1 + C$, $C = 0$,

$$\therefore \quad y^2 = (1+x)^2.$$

⊠

2019/10/

3. 同次形

[準備] 関数 $H(x, y)$ は k 次の同次形である。

$$\overset{\text{d}}{\iff} \quad H(cx, cy) = c^k H(x, y) \quad (\forall c \in \mathbb{R}),$$

□

(k次) 同次形 微分方程式

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

$M(x, y),\ N(x, y)$: k次同次形。

$$M(x, y) = M\left(x \cdot 1,\ x \cdot \frac{y}{x}\right) = x^k M\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad \text{etc. より}.$$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \equiv -\frac{M(1, y/x)}{N(1, y/x)}.$$

$\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ を同次形微分方程式と呼ぶことがある。

〈解法〉 $z = \dfrac{y}{x} \left(\iff y = xz\right)$ とおく

$y' = xz' + z$ により $\quad xz' + z = f(z)$,

$z' = \dfrac{1}{x}\{f(z) - z\}$. …変数分離形に帰着される。

e.g. $(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$ …2次同次形方程式

(解) $z = y/x$ とおくと、$y = xz$, $dy = x\,dz + z\,dx$.

$$\{x^2 + (xz)^2\}\,dx - 2x^2 z\,(x\,dz + z\,dx) = 0,$$

$$(1 + z^2)\,dx - 2z(x\,dz + z\,dx) = 0,$$

$$(1 - z^2)\,dx - 2xz\,dz = 0,$$

$$\frac{2z}{1 - z^2}\,dz = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{2z}{1 - z^2}\,dz = \int \frac{dx}{x},$$

2019/10/

$$\text{l.h.s.} = \int \left(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} \right) dz$$

$$= -\log|1-z| - \log|1+z| = -\log|1-z^2| ,$$

$\log|1-z^2| = -\log|x| + c \quad (c : \text{const}) ,$

$\log|x(1-z^2)| = c ,$

$x(1-z^2) = x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right) = x - \frac{y^2}{x} = \pm e^c ,$

$x^2 - y^2 = Cx , \quad C = \pm e^c \neq 0 \quad \text{const} .$

$C = 0$ の場合. $y^2 = x^2$, $y = \pm x$

$(x^2+y^2)dx - 2xy\,dy = 2x^2 dx - 2x(\pm x)(\pm dx) = 0$

よって, $x^2 - y^2 = 0$ も解である.

解: $x^2 - y^2 = Cx$ (C: 任意定数).

2019 / 10 /

4. 完全微分方程式

全微分方程式　$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$.

ある関数 $U(x,y)$ が存在して $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$.

$$\rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0 \quad \cdots$$ 完全微分方程式

解：$U(x,y) = C$ （C：任意定数）.

$\mathbb{F}(x,y) = (P(x,y),\ Q(x,y))$ はポテンシャル場である.

$\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ ある関数 $U(x,y)$ が存在して $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$.

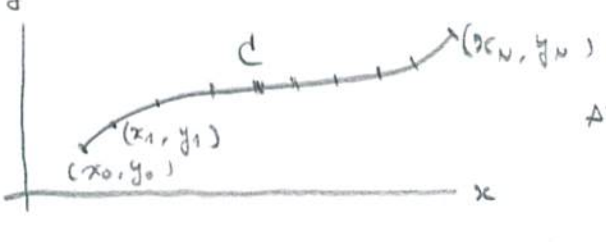
（$U(x,y)$：ポテンシャル）.

〈$\mathbb{F}(x,y)$ がポテンシャル場であるための条件〉

[準備]　線積分

$$\int_C \{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy\} = \lim \sum_{i=1}^{N} \{P(x_i,y_i)\,\Delta x_i + Q(x_i,y_i)\,\Delta y_i\}.$$

極限：$N \to \infty$ かつ $\displaystyle\max_{1 \leq i \leq N} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \to 0$ となるようにとる.



$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(1 \leq i \leq N)$

C をパラメータ表示：$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(a \leq t \leq b)$

$$\rightarrow \int_C (P\,dx + Q\,dy) = \int_a^b \left\{P(\varphi(t),\psi(t))\frac{d\varphi}{dt} + Q(\varphi(t),\psi(t))\frac{d\psi}{dt}\right\}dt.$$

2019/10/

性質：(1) $\int_{C_1+C_2}(Pdx+Qdy)=\int_{C_1}(Pdx+Qdy)+\int_{C_2}(Pdx+Qdy)$。

(2) $\int_{-C}(Pdx+Qdy)=-\int_{C}(Pdx+Qdy)$.

(1)

C_1+C_2

(2)

（準備終わり）

$F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 領域 $D(\subset\mathbb{R}^2)$ 内のベクトル場

定理 $F=(P,Q)$ 単連結領域 $D(\subset\mathbb{R}^2)$ で C^1 級.

次の (1)〜(4) は同値である.

(1) F はポテンシャル場である,

i.e., $Pdx+Qdy=0$ は完全微分方程式である.

(2) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

(3) D 内の任意の閉曲線 C に対して. $\oint_C(Pdx+Qdy)=0$.

(4) 2点 $P_1,P_2\in D$ を任意にとり, P_1,P_2 を結ぶ任意の C_1,C_2 に対し

$$\int_{C_1}(Pdx+Qdy)=\int_{C_2}(Pdx+Qdy)$$

□

単連結領域

単連結でない領域

日本総研 The Japan Research Institute, Limited

(証明)　(1) ⇒ (4)

$F = (P, Q)$ がポテンシャル場なら $P = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial U}{\partial y}$ と書ける

C を P_1, P_2 を結ぶ積分路とすると、

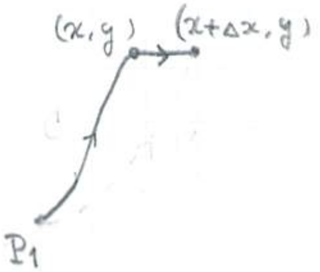
$$\int_C (P\,dx + Q\,dy) = \int_C \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \right) = \int_C dU$$
$$= U(P_2) - U(P_1)$$

となり、線積分の値は P_1, P_2 のみにより決まる（途中経路によらない）

(4) ⇒ (1)　$P_1 \in D$ をひとつとって固定し、$P_2(x, y)$ の関数 $U(x, y)$ を

$$U(x, y) = \int_{P_1}^{P_2} [P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy]$$

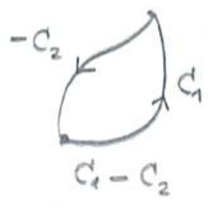
で定義する。線積分は途中経路 C に依らないので、$U(x, y)$ は well-defined である。



$$U(x + \Delta x, y) - U(x, y)$$
$$= \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x, y)} [P(\xi, \eta)\,d\xi + Q(\xi, \eta)\,d\eta]$$
$$\fallingdotseq P(x, y)\,\Delta x$$

により　$\dfrac{\partial U}{\partial x} = P$,　同様にして　$\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q$.

(3) ⇔ (4)　$C_1 - C_2$ が D 内の閉曲線をなすことと



$$\oint_{C_1 - C_2} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{C_1} (P\,dx + Q\,dy)$$
$$- \int_{C_2} (P\,dx + Q\,dy)$$

よりわかる。

2018/10/

(1) $\Rightarrow$ (2)　$\mathbb{F}=(P, Q)$ がポテンシャル場ならば

$P=\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $Q=\dfrac{\partial U}{\partial y}$　と書けるので、

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right),\quad \therefore\ \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1)　P, Q は D 上 C^1 級であり、D は単連結領域であるから、Green の定理より、D 内の任意の閉曲線 C に対し

$$\int_C (P\,dx+Q\,dy)=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_S 0\,dx\,dy=0$$

(S : C 内部の領域)

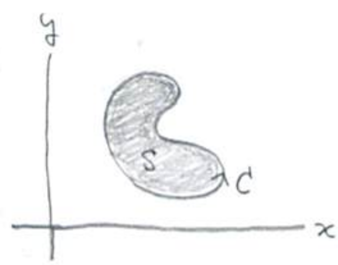
となり、(3) が成り立つ。(3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) がすでに示されているので、(2) $\Rightarrow$ (1) が成立する。　☒

* Green の定理

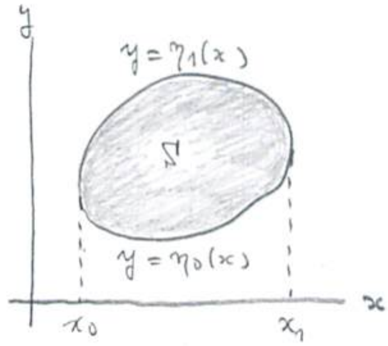
$S(\subset \mathbb{R}^2)$ 単連結領域、C : S の境界（反時計回り）

$P(x, y)$, $Q(x, y)$: $S\cup C$ を含む領域で C^1 級.

$$\int_C (P\,dx+Q\,dy)=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

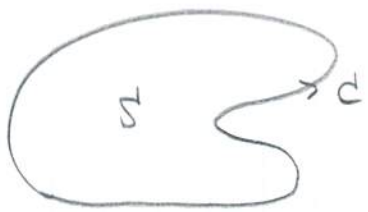


（証明）
$$\iint_S \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\int_{\eta_0(x)}^{\eta_1(x)}\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,dy\right\}dx$$
$$=\int_{x_0}^{x_1}\{P(x, \eta_1(x))-P(x, \eta_0(x))\}\,dx$$
$$=-\oint_C P\,dx.$$

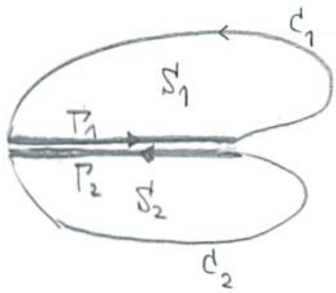


同様に、$\displaystyle\iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}dx\,dy=\oint_C Q\,dy$.

S が下図のような場合



↓



$$
\begin{aligned}
&\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy \\
&= \iint_{S_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy + \iint_{S_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy \\
&= \oint_{C_1} (P\,dx + Q\,dy) + \oint_{C_2} (P\,dx + Q\,dy) \\
&= \oint_C (P\,dx + Q\,dy).
\end{aligned}
$$

$\int_{\Gamma_1}(P\,dx + Q\,dy) + \int_{\Gamma_2}(P\,dx + Q\,dy) = 0$ に注意.

etc. ⊠

〈積分因子〉

$P\,dx + Q\,dy = 0$ 完全でない全微分方程式

しかし、ある関数 $M(x,y)$ を掛けて、$MP\,dx + MQ\,dy = 0$ が完全になることがある。

$M(x,y)$ … <u>積分因子</u>

M は積分因子 $\iff \dfrac{\partial}{\partial y}(MP) = \dfrac{\partial}{\partial x}(MQ)$

i.e.

$M_y P + M P_y = M_x Q + M Q_x$ —— ①

$\left(M_x = \dfrac{\partial M}{\partial x} \quad \text{etc.} \right)$

2019/10/

①を満たす $M(x, y)$ を探すのは難しい．
簡単な場合：

$M = M(x)$ （x だけの関数）と仮定すると，

$$M P_y = M' Q + M Q_x,$$

$$\underbrace{\frac{M'(x)}{M(x)} = \frac{P_y - Q_x}{Q}}$$

x のみの関数でなければならない．
これが成り立てば，

$$\log|M(x)| = \int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx$$

$$\therefore \quad M(x) = \exp\left(\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx\right)$$

同様に，$(Q_x - P_y)/P$ が y のみの関数ならば，
y のみの関数である積分因子

$$M(y) = \exp\left(\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy\right)$$

が得られる．

e.g. $(2xy + y^2)dx + (xy - y^3 + 1)dy = 0$.

（解）$P = 2xy + y^2$, $Q = xy - y^3 + 1$.

$P_y = 2x + 2y$, $Q_x = y$,

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{-2x - y}{2xy + y^2} = -\frac{1}{y} \quad \cdots \ y \text{ のみの関数}$$

$$M(y) = \exp\left(-\int \frac{dy}{y}\right) = \exp(-\log y) = \frac{1}{y}$$

2019/10/

$$MP\,dx + MQ\,dy = (2x+y)\,dx + \left(x - y^2 + \frac{1}{y}\right)dy$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + xy - \frac{1}{3}y^3 + \log|y|\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + xy - \frac{1}{3}y^3 + \log|y|\right)dy$$

$$= d\left(x^2 + xy - \frac{1}{3}y^3 + \log|y|\right) = 0,$$

$$\therefore \quad x^2 + xy - \frac{1}{3}y^3 + \log|y| = C \quad (C：任意定数)．$$

⊠