2019/10/

5. 線形微分方程式

(2階)線形常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = f(x) \qquad \text{—①}$$

$a_1(x), a_2(x), f(x)$: ある区間 I 上で与えられた関数.

必要なだけの連続性, 微分可能性を仮定する

(→区間 I 上でのみ解 y を考えることにする)

とくに $f(x) \equiv 0$ の場合

… 斉次(同次)(2階)常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0 \qquad \text{—②}$$

斉次方程式② について,

y_1, y_2 が解である $\Rightarrow$ $c_1y_1 + c_2y_2$ (c_1, c_2: const) も解である.

i.e.

斉次方程式② の解全体の集合 V は線形空間(ベクトル空間)をなす

(解空間)

★ $\boxed{\text{解空間 } V \text{ は 2 個の基底 } \varphi_1(x), \varphi_2(x) \text{ をもつ. … 基本解}}$

i.e.

② の一次独立な解 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ が存在し, ② の任意の解は

$$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) \quad (c_1, c_2 : \text{const})$$

の形に一意的に表される.

(意味: c_1, c_2 : const, $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = 0$ ($\forall x \in I$)

$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0$.)

これを今から示す.

2019/10/

<u>基本定理</u>（証明略）

線形常微分方程式①の解 $y(x)$ で，任意の初期条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0' \qquad (x_0 \in I)$$

を満たすものが，I 上唯一つ存在する． □

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ ：斉次方程式②の解

φ_1, φ_2 の <u>Wronskian</u>（ロンスキアン）

$$W(x) = W[\varphi_1, \varphi_2](x) \equiv \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}$$

<u>命題1</u>　Wronskian は次の(1),(2)のどちらか一方を満たす：

(1)　$W(x) \neq 0 \quad (\forall x \in I)$

(2)　$W(x) = 0 \quad (\forall x \in I)$ □

（$W(x) \not\equiv 0$ なら，ある点 $x_0, x_1, \cdots \in I$ でのみ $W(x_i) = 0 \ (i = 1, 2, \cdots)$ を満たすということはない．）

$\because$

$$\frac{dW}{dx} = \frac{d}{dx}(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_2\varphi_1') = \varphi_1\varphi_2'' - \varphi_2\varphi_1''$$

$$= \varphi_1(-a_1\varphi_2' - a_2\varphi_2) - \varphi_2(-a_1\varphi_1' - a_2\varphi_1)$$

$$= -a_1 W.$$

$$\therefore \quad W(x) = C \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_1(\xi)\,d\xi\right) \quad (C : \text{const}).$$

$C \neq 0$ ならば $W(x) \neq 0 \ (\forall x \in I)$.

$C = 0$ ならば $W(x) = 0 \ (\forall x \in I)$. ☒

2019/10/

命題2　$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$：斉次方程式②の解

φ_1, φ_2 は②の基本解である $\Leftrightarrow$ $W[\varphi_1, \varphi_2](x) \neq 0$ $(\forall x \in I)$. □

∵ ($\Rightarrow$) 対偶を証明する.

「$W(x) \neq 0$ $(\forall x \in I)$」でないとする. 命題1より, $W(x) = 0$ $(\forall x \in I)$.
とくに, ある1点 $x_0 \in I$ に対し

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

これより, ある定数 c_1, c_2 $((c_1, c_2) \neq (0,0))$ が存在して,

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(x_0) + c_2\varphi_2(x_0) = 0 \\ c_1\varphi_1'(x_0) + c_2\varphi_2'(x_0) = 0 \end{cases}.$$

よって, $\psi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$ は斉次方程式②の解であり,
初期条件 $\psi(x_0) = 0$, $\psi'(x_0) = 0$ を満たす.

一方, $y(x) \equiv 0$ も②の解で初期条件 $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ を
満たす. よって, 基本定理（解の一意的存在）より

$$\psi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) \equiv 0.$$

$(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ であるから, φ_1, φ_2 は一次独立でない.

($\Leftarrow$) 対偶を証明する.
φ_1, φ_2 が基本解でないとすると, ある定数 c_1, c_2 $((c_1, c_2) \neq (0,0))$ が
存在し, $c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = 0$ $(\forall x \in I)$, したがって,
$c_1\varphi_1'(x) + c_2\varphi_2'(x) = 0$ $(\forall x \in I)$ が成り立つ. とくに, ある1点 $x_0 \in I$ に
対し,

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ であるから，係数行列は特異であり，

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0.$$

したがって，「$W(x) \neq 0 \ (\forall x \in I)$」が成立しない。 ☒

<u>命題3</u>　斉次方程式②の一次独立な解 $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ は必ず存在する。□

$\because$ 正則行列 $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ を任意にとり（例えば $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$），

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ をそれぞれ初期条件

$$\begin{cases} \varphi_1(x_0) = b_{11} \\ \varphi_1'(x_0) = b_{21} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_2(x_0) = b_{12} \\ \varphi_2'(x_0) = b_{22} \end{cases}$$

を満たす②の解とする。そのような φ_1, φ_2 は基本定理より存在する。
そのとき，φ_1, φ_2 の Wronskian は

$$W(x) = (\det B) \exp\left[-\int_{x_0}^{x} a_1(\xi)\, d\xi\right]$$

で与えられる。$\det B \neq 0$ より $W(x) \neq 0 \ (\forall x \in I)$ であるから，命題2より本命題は成立する。 ☒

これより ⊛，すなわち，初期値問題

$$⊛ \begin{cases} y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0' \qquad (x_0 \in I) \end{cases}$$

の解は $y(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x)$ の形に一意的に表されることを示す。

c_1, c_2 を次を満たすようにとる：

$$\begin{cases} c_1 \varphi_1(x_0) + c_2 \varphi_2(x_0) = y_0 \\ c_1 \varphi_1'(x_0) + c_2 \varphi_2'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

（$W(x_0) \neq 0$ よりこれは可能）。このとき，$y = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x)$ とおけば，

2019/10/

$y(x)$ は初期値問題(*) の解である.

(一意性) $\eta(x) = \gamma_1\varphi_1(x) + \gamma_2\varphi_2(x)$ (γ_1, γ_2 const) を(*)の解とする.
$z(x) \equiv y(x) - \eta(x) = (c_1 - \gamma_1)\varphi_1(x) + (c_2 - \gamma_2)\varphi_2(x)$
とおくと, $z(x)$ は初期値問題

$$(*_1)\quad \begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

の解である. 一方, $y(x) \equiv 0$ も$(*_1)$の解であるから, 基本定理(解の一意性)より $z(x) \equiv 0$ である. φ_1, φ_2 は一次独立であるから,
$c_1 - \gamma_1 = c_2 - \gamma_2 = 0$, ゆえに, $c_1 = \gamma_1$, $c_2 = \gamma_2$ を得る.

$\boxtimes$

6、定数係数線形常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2 y = 0. \quad (a_1, a_2 : \mathrm{const.}) \qquad \text{——①}$$

ふたつの一次独立解を求めればよい.

解を $y(x) = e^{\lambda x}$ (λ : const.) の形と仮定し、①に代入する.

$$(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)e^{\lambda x} = 0.$$

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \ \longrightarrow \text{解 } \lambda_1, \lambda_2 .$$

$\boxed{\lambda_1 \neq \lambda_2}$ ならば、$e^{\lambda_1 x}$. $e^{\lambda_2 x}$ は明らかにふたつの一次独立解である.
(基本解)

∴ 一般解 $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ (C_1, C_2 : 任意定数)

念のため、Wronskian をチェックしてみる.

$$W[e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ (e^{\lambda_1 x})' & (e^{\lambda_2 x})' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0 .$$

∴ $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ は一次独立解である

$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda_0)}$ ならば、解はひとつ $e^{\lambda x}$ しか得られていない.

もうひとつの独立解 ⟶ 定数変化法により求める

解を $y(x) = C(x)e^{\lambda_0 x}$ の形に仮定し①に代入する.

$$y' = (C' + \lambda_0 C)e^{\lambda_0 x}, \quad y'' = (C'' + 2\lambda_0 C' + \lambda_0^2 C)e^{\lambda_0 x}.$$

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = (\lambda - \lambda_0)^2$ より $a_1 = -2\lambda_0$, $a_2 = \lambda_0^2$ であるから,

$$
\begin{aligned}
& y'' + a_1 y' + a_2 y \\
&= (C'' + 2\lambda_0 C' + \lambda_0^2 C)e^{\lambda_0 x} - 2\lambda_0(C' + \lambda_0 C)e^{\lambda_0 x} + \lambda_0^2 C e^{\lambda_0 x} \\
&= C''(x)e^{\lambda_0 x} = 0.
\end{aligned}
$$

$C''(x) = 0$, $\quad C(x) = C_1 x + C_0 \quad (C_1, C_2 : \text{const})$,

$$y = C_1 \underline{x e^{\lambda_0 x}} + C_2 e^{\lambda_0 x}.$$

よって，もうひとつの独立な解として $x e^{\lambda_0 x}$ が得られた。

一般解 $\quad \underline{y = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x} \ (C_1, C_2 : \text{任意定数})}$

（これで，念のため Wronskian をチェックする．

$$W[e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 x} & x e^{\lambda_0 x} \\ (e^{\lambda_0 x})' & (x e^{\lambda_0 x})' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 x} & x e^{\lambda_0 x} \\ \lambda_0 e^{\lambda_0 x} & (\lambda_0 x + 1)e^{\lambda_0 x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_0 x} \neq 0.$$

$\therefore$ $e^{\lambda_0 x}$, $x e^{\lambda_0 x}$ は一次独立解（基本解）である．）

<u>例</u> $\quad y'' + 2y' - 3y = 0$.

（解） $y = e^{\lambda x}$ とおいて代入すると，$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$
$\lambda = 1, -3$ を得る． $\quad \therefore\ y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}$ （C_1, C_2：任意定数）． ⊠

<u>例</u> $\quad y'' + 4y' = 0$.

（解） $y = e^{\lambda x}$ とおいて代入すると，$\lambda^2 + 4\lambda = 0$． $\lambda = 0, -4$.
$\therefore\ y = C_1 + C_2 e^{-4x}$ （C_1, C_2：任意定数）． ⊠

例　$y'' - 2y' + y = 0$.

(解)　$y = e^{\lambda x}$ とおいて代入すると, $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$. $\lambda = 1$ (重根)
よって, 基本解として e^x, xe^x を得る.

$$\therefore \quad y = C_1 e^x + C_2 x e^x \quad (C_1, C_2 : 任意定数).$$ ☒

例　$y'' + y = 0$

(解)　$y = e^{\lambda x}$ とおいて代入すると, $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda = \pm i$

$$\therefore \quad y = C_1 \underbrace{e^{ix} + C_2 e^{-ix}}_{e^{\pm ix}\text{ は何?}} \quad (C_1, C_2 : 任意定数).$$

$e^{\pm ix}$ は何?

$$\boxed{\text{Euler の公式} \quad e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta}$$

(導出)　関数 $f(x)$ の Taylor 展開 (→「解析学」後半で扱う)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

もっと一般に

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

これより

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \quad \text{―― ①}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \quad \text{―― ②}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots. \quad \text{―― ③}$$

① に $x = i\theta$ を代入すると、

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta.$$

* ほんとうはもっと厳密な議論が必要。

前の例題に戻ると、

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} = C_1(\cos x + i\sin x) + C_2(\cos x - i\sin x)$$

$$= (C_1 + C_2)\cos x + i(C_1 - C_2)\sin x.$$

$C_1 + C_2$, $i(C_1 - C_2)$ をまとめて C_1, C_2 と書いて

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x \quad (C_1, C_2 : 任意定数).$$

- 公式 $e^{x+y} = e^x e^y$ は x, y が純虚数の場合でも成立する：

$$e^{i(\theta+\varphi)} = e^{i\theta}e^{i\varphi}.$$

$\because$ $e^{i(\theta+\varphi)} = \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)$ ← (三角関数の加法定理)

$$= (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) + i(\sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi)$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= e^{i\theta}e^{i\varphi}. \qquad \boxtimes$$

- もっと一般に、複素数 z, w に対して、

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

$$\because\ e^z e^w = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{w^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^n w^m}{n!\,m!}$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\boxed{\sum_{n+m=N}\frac{N!}{n!\,m!}z^n w^m}$$ ← (二項定理)を適用。

$$= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{(z+w)^N}{N!} = e^{z+w}. \qquad \boxtimes$$

これより、複素数 $z=x+iy$ $(x=\mathrm{Re}\,z,\ y=\mathrm{Im}\,z)$ に対して、

$$e^{x+iy}=e^{x}e^{iy}=e^{x}(\cos x+i\sin x).$$

<u>例</u> $y''+4y'+5y=0$.

(解) $y=e^{\lambda x}$ とおいて代入すると、$\lambda^2+4\lambda+5=0$, $\lambda=-2\pm i$

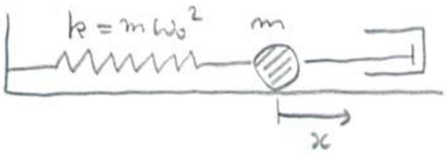
$$y=C_1e^{(-2+i)x}+C_2e^{(-2-i)x}\quad (C_1, C_2 : \text{任意定数})$$

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{-2x}(\cos x+i\sin x)+C_2e^{-2x}(\cos x-i\sin x)\\ &=(C_1+C_2)e^{-2x}\cos x+i(C_1-C_2)e^{-2x}\sin x. \end{aligned}$$

C_1+C_2, $i(C_1-C_2)$ を改めて C_1, C_2 と書いて、

$$y=C_1e^{-2x}\cos x+C_2e^{-2x}\sin x\quad (C_1, C_2 : \text{任意定数}).$$ ☒

(応用) 速度に比例する抵抗を受ける調和振動子



抵抗 $-\mu\dot{x}=-2m\alpha\dot{x}$

運動方程式 $m\ddot{x}=-\mu\dot{x}-kx$,

$$\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

$x=e^{\lambda t}$ とおいて代入すると、

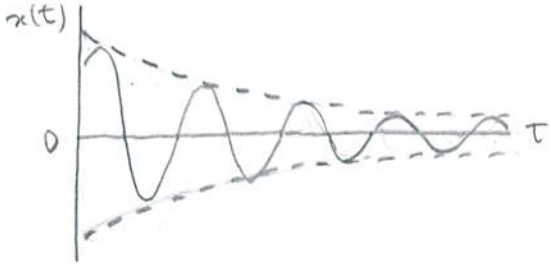
$$\lambda^2+2\alpha\lambda+\omega_0^2=0 \qquad \therefore\ \lambda=-\alpha\pm i\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}$$

(i) $\omega_0>\alpha$ の場合

基本解 $e^{-\alpha t}e^{i\omega t}$, $e^{-\alpha t}e^{-i\omega t}$ $(\omega=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2})$

あるいは $e^{-\alpha t}\cos\omega t$, $e^{-\alpha t}\sin\omega t$

∴ $x(t) = e^{-\alpha t}(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t)$ （C_1, C_2：任意定数）



減衰振動.

(ii) $\omega_0 < \alpha$ の場合

基本解 $e^{-\alpha_1 t}, e^{-\alpha_2 t}$ （$\alpha_1 = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, $\alpha_2 = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$）

$x(t) = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$ （C_1, C_2：任意定数）

ふつうに減衰するのみ

(ii) $\omega_0 = \alpha$ の場合

基本解 $e^{-\alpha t}, te^{-\alpha t}$

$x(t) = e^{-\alpha t}(C_0 + C_1 t)$ （C_0, C_1：任意定数）

グラフは(ii)とあまり変わらない.