定数係数線形常微分方程式の初等的解法

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2 y = 0 \quad (a_1, a_2 : \text{const.})$$

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ の根を α, β とおくと，根と係数の関係より

$$a_1 = -\alpha - \beta, \quad a_2 = \alpha\beta$$

$$y'' - (\alpha+\beta)y' + \alpha\beta = 0,$$

$$(y' - \alpha y)' - \beta(y - \alpha y) = 0.$$

$z = y' - \alpha y$ とおくと，

$$\begin{cases} z' - \beta z = 0 & \text{——①} \\ y' - \alpha y = z & \text{——②} \end{cases}$$

①の解： $z = e^{\beta x}u$ とおくと， $z' = e^{\beta x}(u' + \beta u)$ より，

$$z' - \beta z = e^{\beta x}u' = 0, \quad u' = 0,$$

$$u = C\,(\text{const.}), \quad z = Ce^{\beta x}$$

②は

$$y' - \alpha y = Ce^{\beta x}$$

となる。

($\alpha \neq \beta$ の場合) $y = e^{\alpha x}w$ とおくと $y' = e^{\alpha x}(w' + \alpha w)$ より

$$y' - \alpha y = e^{\alpha x}w' = Ce^{\beta x}, \quad w' = Ce^{(\beta-\alpha)x},$$

$$w = \frac{C}{\beta-\alpha}e^{(\beta-\alpha)x} + C' \quad (C' : \text{const.})$$

$$y = \frac{C}{\beta-\alpha}e^{\beta x} + C'e^{\alpha x}.$$

$$\therefore \quad y = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x} \quad (C_1, C_2 : \text{const.})$$

(α=β の場合) $y' - \alpha y = Ce^{\alpha x}$

$y = e^{\alpha x} w$ とおくと,

$e^{\alpha x} w' = Ce^{\alpha x}$, $w' = C$,

$w = Cx + C'$ (C' : const.), $y = (Cx + C')e^{\alpha x}$

$\therefore \quad y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} \quad (C_1, C_2 : \text{const.})$

NO.

DATE

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0$$ の解法（Eulerの公式を使わない方法）

両辺に $\frac{dx}{dt}$ をかけて積分すると、

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{\omega^2}{2}x^2=\frac{1}{2}C^2 \quad (C: \text{const.})$$

… エネルギー保存則

$$\int\frac{dx}{\sqrt{C^2-\omega^2x^2}}=\pm\int dt$$

$$\text{左辺}=\frac{1}{\omega}\int\frac{d(\omega x/C)}{\sqrt{1-(\omega x/C)^2}}=\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{\omega x}{C}\right)\ (+\text{const.}),$$

$$\arcsin\left(\frac{\omega x}{C}\right)=\pm\omega(t-t_0) \quad (t_0: \text{const.})$$

$$\therefore\ x(t)=C\sin[\omega(t-t_0)] \quad (C, t_0: \text{const.}).$$

$$x(t)=C(\sin\omega t\cos\omega t_0-\cos\omega t\sin\omega t_0).$$

$C_1=C\cos\omega t_0$, $C_2=-C\sin\omega t_0$ とおくと、

$$x(t)=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t.$$

KOKUYO