2階非斉次線形常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = f(x). \quad \text{―― ①}$$

対応する斉次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0. \quad \text{―― ②}$$

ℯ式の方程式の解をひとつ($y_0(x)$とする)，何らかの方法で見つける．…<u>特解</u>という．
$y(x)$：①の解，$z(x) \equiv y(x) - y_0(x)$ とおくと，

$$z'' + a_1 z' + a_2 z = f.$$

$$\text{左辺} = (y-y_0)'' + a_1(y-y_0)' + a_2(y-y_0)$$
$$= (y'' + a_1 y' + a_2 y) - (y_0'' + a_1 y_0' + a_2 y_0)$$
$$= f - f = 0$$

$\therefore\ z'' + a_1 z' + a_2 z = 0$ …zは斉次方程式の解

$\Downarrow$

$z(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ （$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$：斉次方程式の基本解，$C_1, C_2$：const.）

$$y(x) = y_0(x) + z(x) = y_0(x) + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x).$$

(非斉次方程式の一般解) = (特解) + (斉次方程式の一般解).

問題："特解"をどうやって求めるか？ …ケース・バイ・ケース．

ここでは，定数係数方程式の場合について，いくつかの具体的な特解の求め方を紹介する．

1° <u>$f(x)$：多項式</u>
多項式の形の特解$y_0(x)$が存在する．

$$y_0'' + a_1 y_0' + a_2 y_0 = f.$$

$$\deg(\text{左辺}) = \begin{cases} \deg y_0 & (a_2 \neq 0) \\ \deg y_0 - 1 & (a_2 = 0\ \&\ a_1 \neq 0) \\ \deg y_0 - 2 & (a_1 = a_2 = 0) \end{cases} = \deg f.$$

$$\therefore\ \deg y_0 = \begin{cases} \deg f & (a_2 \neq 0) \\ \deg f + 1 & (a_2 = 0\ \&\ a_1 \neq 0) \\ \deg f + 2 & (a_1 = a_2 = 0) \end{cases}$$

例1 $y'' + y = x^2 + 4x + 3$.

(解) 対応する斉次方程式 $y'' + y = 0$ の一般解は $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ である.
特解 $y_0(x)$ として多項式の形のものが存在するので, $y_0(x)$ を多項式とする.
$\deg(y_0'' + y_0) = \deg y_0 = 2$ より $y_0(x)$ は2次多項式である.
そこで $y_0(x) = ax^2 + bx + c$ とおいてみる.

$$y_0''(x) + y_0(x) = 2a + (ax^2 + bx + c)$$
$$= ax^2 + bx + (2a + c) = x^2 + 4x + 3$$

より,

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ 2a + c = 3 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases}, \quad y_0(x) = x^2 + 4x + 1.$$

以上より, 題意の方程式の一般解は $y(x) = x^2 + 4x + 1 + C_1 \cos x + C_2 \sin x$. ⊠

例2 $y'' + y' = 2x + 5$.

(解) 対応する斉次方程式 $y'' + y' = 0$ の一般解は $y = C_1 + C_2 e^{-x}$.
特解 $y_0(x)$ として多項式のものが存在するので, $y_0(x)$ を多項式とする.
$\deg(y_0'' + y_0') = \deg y_0 - 1 = 1$ より $\deg y_0 = 2$, よって $y_0(x)$ は2次式である.
$y_0(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと,

$$y_0'' + y_0' = 2a + (2ax + b) = 2ax + (2a + b) = 2x + 5,$$

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c : \text{任意} \to c = 0 \text{ としておく.} \end{cases} \quad y_0(x) = x^2 + 3x.$$

以上より, 題意の方程式の一般解は $y(x) = x^2 + 3x + C_1 + C_2 e^{-x}$. ⊠

＜山辺の方法＞

例1　$y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + 16x + 25$

の特解を求める。

$$D \equiv \frac{d}{dx} \quad (\text{微分演算子})$$

とおくと、

$$(D^2 + 3D + 2)y = 2x^2 + 16x + 25,$$

$$\left(1 + \frac{3}{2}D + \frac{1}{2}D^2\right)y = x^2 + 8x + \frac{25}{2}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 5x + 4 \\
\hline
1 + \frac{3}{2}D + \frac{1}{2}D^2 & x^2 + 8x + \frac{25}{2} \\
 & x^2 + 3x + \cancel{2}\,1 \quad \leftarrow \left(1 + \frac{3}{2}D + \frac{1}{2}D^2\right)x^2 \\
\hline
 & 5x + \frac{23}{2} \\
 & 5x + \frac{15}{2} \quad \leftarrow \left(1 + \frac{3}{2}D + \frac{1}{2}D^2\right)5x \\
\hline
 & 4 \\
 & 4 \quad \leftarrow \left(1 + \frac{3}{2}D + \frac{1}{2}D^2\right)4 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

∴　特解　$y_0(x) = x^2 + 5x + 4$　が求まった。

もとの方程式の一般解は　$y(x) = x^2 + 5x + 4 + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.

例2　の特解を山辺の方法で求めてみる。

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 3x \\
\hline
D + D^2 & 2x + 5 \\
 & 2x + 2 \\
\hline
 & 3 \\
 & 3 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

∴　特解　$x^2 + 3x$　が求まった。

2° $f(x) = e^{\alpha x} p(x)$, $p(x)$：多項式

$y = e^{\alpha x} z(x)$ とおくと、$y' = (z' + \alpha z) e^{\alpha x}$, $y'' = (z'' + 2\alpha z' + \alpha^2 z) e^{\alpha x}$
となるので、

$$y'' + a_1 y' + a_2 = (z'' + b_1 z' + b_2 z) e^{\alpha x} = e^{\alpha x} p(x) \quad (b_1, b_2 : \text{const.})$$

$$\therefore \ z'' + b_1 z' + b_2 z = p(x).$$

$$\Downarrow$$

$f(x)$ = 多項式 の場合に帰着できる。

例1　$y'' - 2y' - 3y = e^{-x}(24x^2 - 4x + 2)$

(解) 斉次形 $y'' - 2y' - 3y = 0$ の一般解は $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$ (c_1, c_2 : const.)。
特解を $y = e^{-x} z(x)$ とおくと、

$$y' = (z' - z) e^{-x}, \quad y'' = (z'' - 2z' + z) e^{-x}.$$

$$y'' - 2y' - 3y = \{(z'' - 2z' + z) - 2(z' - z) - 3z\} e^{-x}$$

$$= (z'' - 4z') e^{-x} = e^{-x}(24x^2 - 4x + 2),$$

$$z'' - 4z' = 24x^2 - 4x + 2$$

特解を右図の方法で求める。

$$\left(D - \frac{1}{4}D^2\right) z = -6x^2 + x - \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} & -2x^3 - x^2 - x \\ \hline D - \frac{1}{4}D^2 & -6x^2 + x - \frac{1}{2} \\ & \underline{-6x^2 + 3x} \\ & -2x - \frac{1}{2} \\ & \underline{-2x + \frac{1}{2}} \\ & -1 \\ & \underline{-1} \\ & 0 \end{array}$$

右の計算より、$z(x) = -(2x^3 + x^2 + x)$。
よって、特解 $y = -e^{-x}(2x^3 + x^2 + x)$ を得る。

一般解：$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - e^{-x}(2x^3 + x^2 + x)$
(c_1, c_2 : const.) ⊠

$f(x) = p(x) \left\{ \begin{matrix} \cos \omega x \\ \sin \omega x \end{matrix} \right\}$ ($p(x)$：多項式)

→ Eulerの公式により

$$f(x) = e^{i\omega x} p(x)$$

の場合に帰着できる。

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = e^{i\omega x} p(x) \longrightarrow \text{特解 } y = y_0(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y'' + a_1 y' + a_2 y = p(x)\cos\omega x & \cdots \text{特解 } y = \mathrm{Re}\, y_0(x) \\ y'' + a_1 y' + a_2 y = p(x)\sin\omega x & \cdots \text{特解 } y = \mathrm{Im}\, y_0(x) \end{cases}$$

例 $y'' + y = \cos x$.

(解) $y'' + y = e^{ix}$ の解をもとめ実部をとればよい.

斉次形 $y'' + y = 0$ の一般解は $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ (c_1, c_2 const.)

$y'' + y = e^{ix}$ の特解をもとめるため, $y = e^{ix} z(x)$ とおく.

$y' = (z' + iz)e^{ix}$, $y'' = (z'' + 2iz' - z)e^{ix}$.

$y'' + y = (z'' + 2iz')e^{ix} = e^{ix}$.

$\therefore$ $z'' + 2iz' = 1$.

これは $z = \dfrac{x}{2i}$ を特解にもつ. よって, 特解 $y = \dfrac{x}{2i} e^{ix}$ を得る.

その実部 $\mathrm{Re}\left(\dfrac{x}{2i} e^{ix}\right) = \mathrm{Re}\left\{\dfrac{x}{2i}(\cos x + i\sin x)\right\} = \dfrac{x}{2}\sin x$ はもとの方程式の特解である.

$\therefore$ 一般解: $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \dfrac{x}{2}\sin x$ (c_1, c_2 : const.).

演算子法

微分演算子(作用素) $D \equiv \frac{d}{dx}$, $Dy = \frac{dy}{dx}$

$$(c_0 + c_1 D + \cdots + c_m D^m) y = c_0 y + c_1 \frac{dy}{dx} + \cdots + c_m \frac{d^m y}{dx^m}$$

$$y = (c_0 + c_1 D + \cdots c_m D^m)^{-1} f(x)$$

$\Longleftrightarrow$ y は $(c_0 + c_1 D + \cdots + c_m D^m) y = f(x)$ の解である。

<公式1> $p(x)$: 多項式, c : const.

$$(1 - cD)^{-1} p(x) = \underbrace{(1 + cD + c^2 D^2 + \cdots) p(x)}_{\text{実際は有限項でとめる}}$$

(∵ $p(x)$ を n 次多項式とすると、

$$(1 - cD)(1 + cD + \cdots + c^n D^n) p(x) = (1 - c^{n+1} D^{n+1}) p(x) = p(x)$$

∴ $(1 + cD + \cdots + c^n D^n) p(x)$ は $(1 - cD) y = p(x)$ の解である。 ⊠)

<公式2> $D\{e^{\alpha x} f(x)\} = e^{\alpha x} (D + \alpha) f(x)$ (α : const.)

(∵ $D\{e^{\alpha x} f(x)\} = \frac{d}{dx}\{e^{\alpha x} f(x)\} = e^{\alpha x}\left\{\frac{df(x)}{dx} + \alpha f(x)\right\} = e^{\alpha x}(D + \alpha) f(x)$. ⊠)

拡張

$D^n \{e^{\alpha x} f(x)\} = e^{\alpha x} (D + \alpha)^n f(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$,

$P(D)\{e^{\alpha x} f(x)\} = e^{\alpha x} P(D + \alpha) f(x)$ ($P(D)$: D の多項式),

$P(D)^{-1}\{e^{\alpha x} p(x)\} = e^{\alpha x} P(D + \alpha)^{-1} p(x)$ ($P(D)$: D の多項式, $p(x)$: 多項式)

例 $y'' + 5y' + 4y = 4x^2 + 14x + 11$

(解) 斉次方程式の一般解は $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x}$. 特解を演算子法で求める.

$(D^2 + 5D + 4) y = (1 + D)(4 + D) y = x^2 + 11x + 8$.

$(4 + D) y = (1 + D)^{-1} (4x^2 + 14x + 11)$

$= (1 - D + D^2 - \cdots)(4x^2 + 14x + 11)$

$= (4x^2 + 14x + 11) - (8x + 14) + 8 - 0 + \cdots = 4x^2 + 6x + 5$

$(1 + \frac{D}{4}) y = x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{5}{4}$

$y = (1 + \frac{D}{4})^{-1} y = (1 - \frac{D}{4} + \frac{D^2}{16} - \cdots)(x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{5}{4})$

$= (x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{5}{4}) - \frac{1}{4}(2x + \frac{3}{2}) + \frac{1}{16} \cdot 2 - 0 + \cdots = x^2 + x + 1$

∴ $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-4x} + x^2 + x + 1$. ⊠

例 $y'' + y = 2e^x(x^2+2x+4)$.

(解) 斉次形 $y''+y=0$ の一般解は $y = c_1\cos x + c_2\sin x$.
特解を演算子法で求める。

$$(1+D^2)y = 2e^x(x^2+2x+4),$$
$$y = 2(1+D^2)^{-1}\{e^x(x^2+2x+4)\}$$
$$= 2e^x\{1+(D+1)^2\}^{-1}(x^2+2x+4)$$
$$= 2e^x(2+2D+D^2)^{-1}(x^2+2x+4)$$
$$= e^x\left(1+D+\frac{D^2}{2}\right)^{-1}(x^2+2x+4)$$
$$= e^x\left\{1-\left(D+\frac{D^2}{2}\right)+\left(D+\frac{D^2}{2}\right)^2-\cdots\right\}(x^2+2x+4)$$
$$= e^x\left[(x^2+2x+4)-\left\{(2x+2)+\frac{1}{2}\cdot 2\right\}+2-0+\cdots\right]$$
$$= e^x(x^2+3).$$

∴ 一般解 $y = c_1\cos x + c_2\sin x + e^x(x^2+3)$. ☒

例 $y''+y = \sin x$

(解) $y''+y = e^{ix}$ の解の虚部をとればよい。
特解を演算子法で求める。

$$(1+D^2)y = e^{ix},$$
$$y = (1+D^2)^{-1}e^{ix} = e^{ix}\{1+(D+i)^2\}^{-1}1$$
$$= e^{ix}(2iD+D^2)^{-1}1$$
$$= e^{ix}(2i+D)^{-1}D^{-1}1$$
$$= e^{ix}(2i+D)^{-1}x$$
$$= \frac{1}{2i}e^{ix}\left(1+\frac{D}{2i}\right)^{-1}x = \frac{1}{2i}e^{ix}\left(1-\frac{D}{2i}-\frac{D^2}{4}+\cdots\right)x$$
$$= \frac{e^{ix}}{2i}\left(x-\frac{1}{2i}\right) = \frac{1}{2i}xe^{ix} + \underbrace{\frac{1}{4}e^{ix}}_{\text{斉次形の解}}$$

よって 特解 $y = \frac{1}{2i}xe^{ix}$.
虚部をとって、もとの方程式の特解 $y = -\frac{1}{2}x\cos x$ を得る。

∴ 一般解 $y = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$. ☒

〈定数変化法〉

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = f(x) \quad \text{—①}$$

①の斉次形

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0 \quad \text{—②}$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x)$: ②の基本解

(②の一般解 $y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$ $(c_1, c_2 : \text{const.})$)

①の特解を次の形で求める:

$$y = c_1(x)\varphi_1(x) + c_2(x)\varphi_2(x) \quad \text{…定数変化法} \quad \text{—③}$$

ただし、次を仮定する:

$$c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) = 0.$$

(∵ ③を①に代入して得られる方程式はひとつ。
一方、未知関数は $c_1(x)$, $c_2(x)$ のふたつなので、もうひとつ方程式が必要である。図)

③より

$$y' = \underbrace{c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2}_{0} + c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2'$$
$$= c_1\varphi_1' + c_2\varphi_2',$$

$$y'' = c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + c_1\varphi_1'' + c_2\varphi_2'',$$

$$y'' + a_1y' + a_2y$$
$$= c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' + c_1\underbrace{(\varphi_1'' + a_1\varphi_1' + a_2\varphi_1)}_{0} + c_2\underbrace{(\varphi_2'' + a_1\varphi_2' + a_2\varphi_2)}_{0}$$
$$= f.$$

$$\therefore \begin{cases} c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

$c_1'(x)$, $c_2'(x)$ について解いて、

$$c_1'(x) = -\frac{\varphi_2(x)}{W(x)}f(x), \quad c_2'(x) = \frac{\varphi_1(x)}{W(x)}f(x),$$

$\left(W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} \text{ (Wronskian)} \right.$ … $W \neq 0$ より上の連立一次方程式は必ず解ける)

$$c_1(x) = -\int^x \frac{\varphi_2(\xi)}{W(\xi)}f(\xi)\,d\xi, \quad c_2(x) = \int^x \frac{\varphi_1(\xi)}{W(\xi)}f(\xi)\,d\xi,$$

これを③に代入して、次の特解を得る：

$$y(x) = -\int^x \{\varphi_1(x)\varphi_2(\xi) - \varphi_2(x)\varphi_1(\xi)\}\frac{f(\xi)}{W(\xi)}\,d\xi$$

$$= -\int^x \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1(\xi) & \varphi_2(\xi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(\xi) & \varphi_2(\xi) \\ \varphi_1'(\xi) & \varphi_2'(\xi) \end{vmatrix}} f(\xi)\,d\xi.$$

例) $y'' + y = \cos x.$

(解) 斉次形 $y'' + y = 0$ の一般解は $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ (c_1, c_2 : const.).
特解を定数変化法で求める： $y = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$. ただし、
$c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0$ と仮定する.

$$y' = \underbrace{c_1'\cos x + c_2'\sin x}_{0} - c_1 \sin x + c_2 \cos x = -c_1\sin x + c_2\cos x,$$

$$y'' = -c_1'\sin x + c_2'\cos x - c_1\cos x - c_2 \sin x,$$

$$y'' + y = -c_1'\sin x + c_2'\cos x = \cos x,$$

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0 \\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \cos x \end{cases}$$

$c_1'(x)$, $c_2'(x)$ について解いて、

$$c_1'(x) = -\sin x\cos x, \quad c_2'(x) = \cos^2 x.$$

$$c_1(x) = -\int \sin x\cos x\,dx = \int \cos x(\cos x)'\,dx = \frac{1}{2}\cos^2 x = \frac{1}{4}(\cos 2x + 1),$$

$$c_2(x) = \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x + 1)\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x,$$

$$y = \frac{1}{4}\cos x(\cos 2x + 1) + \sin x\left(\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x) + \frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{2}x\sin x$$

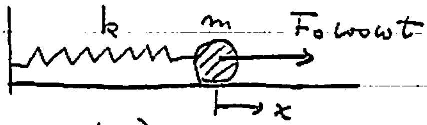
$$= \underbrace{\frac{1}{2}\cos x}_{\text{斉次形の解}} + \frac{1}{2}x\sin x.$$

よって、特解 $y = \frac{1}{2}x\sin x$ を得る.

一般解： $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x.$

(解析学)

〈調和振動子の強制振動〉



運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_0\cos\omega t \qquad (\omega>0,\ F_0>0\ \text{const})$$

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x = C_0\cos\omega t \qquad \left(\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}},\ C_0=\frac{F_0}{m}\right)$$

$\longrightarrow$ $\ddot{x}+\omega_0^2 x = C_0 e^{i\omega t}$ の解の実部をとればよい。

$\omega\neq\omega_0$ の場合、$x=Ae^{i\omega t}$ (A: const) の形の特解をもつ。方程式に代入して、

$$A(\omega_0^2-\omega^2)e^{i\omega t} = C_0 e^{i\omega t}$$

$$A=\frac{C_0}{\omega_0^2-\omega^2},\qquad x=\frac{C_0 e^{i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2}$$

実部をとって、 $x=\dfrac{C_0\cos\omega t}{\omega_0^2-\omega^2}$.

$\omega=\omega_0$ の場合、$x(t)=e^{i\omega_0 t}u(t)$ とおいて方程式に代入すると、

$$\dot{x}=e^{i\omega_0 t}(\dot{u}+i\omega_0 u),\qquad \ddot{x}=e^{i\omega_0 t}(\ddot{u}+2i\omega_0\dot{u}-\omega_0^2 u),$$

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x = e^{i\omega_0 t}(\ddot{u}+2i\omega_0\dot{u}) = C_0 e^{i\omega_0 t}$$

$$\ddot{u}+2i\omega_0\dot{u} = C_0.$$

これは多項式の形の特解をもつ。

$$\deg(\ddot{u}+2i\omega_0\dot{u}) = \deg u - 1 = \deg \overset{\text{const}}{C_0} = 0 \quad \text{より} \quad \deg u = 1.$$

そこで $u(t)=at+b$ (a, b const) とおくと、

$$\ddot{u}+2i\omega_0\dot{u} = 2i\omega_0 a = C_0,$$

$$a=\frac{C_0}{2i\omega_0},\quad b:\ \text{任意} \to b=0 \ \text{とする。}$$

$\therefore$ 特解 $u(t)=\dfrac{C_0}{2i\omega_0}t$ を得た。

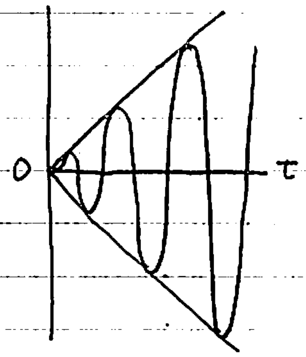
$$x(t)=\frac{C_0}{2i\omega_0}e^{i\omega_0 t},\quad \text{実部をとって}\quad x(t)=\frac{C_0}{2\omega_0}t\sin\omega_0 t.$$

斉次方程式の一般解と合わせて、

$$x(t)=C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \begin{cases} \dfrac{C_0}{\omega_0^2-\omega^2}\cos\omega t & (\omega\neq\omega_0) \\ \dfrac{C_0}{2\omega_0}t\sin\omega_0 t & (\omega=\omega_0). \end{cases}$$

$$\left(C_1, C_2:\ \text{const},\ C_0=\frac{F_0}{m},\ \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$

$\omega = \omega_0$ の場合の特解のふるまい



時間の経過とともに振動が激しくなっている。

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: 調和振動子の固有振動数

物理系のもつ固有振動数と同じ振動数で振動する外力を加えると、物理系は激しく振動する。

… 共鳴 (resonance)