2019/

無限級数論

1. 実数列

実数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の極限.

$$a_n \to a \ (n \to \infty) \quad \text{or} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

（ $\{a_n\}$ は $n \to \infty$ のとき a に収束する ）

$\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ n を大きくすると a_n は a に限りなく近づく.

〈厳密な定義〉

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \text{s.t.}\ |a_n - a| < \varepsilon \ (\forall n \geq n_0)$$

（ 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して,
任意の $n \geq n_0$ に対し $|a_n - a| < \varepsilon$ が成立する ）

e.g. 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 - 2n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - n^{-2}}{1 - 2n^{-1} + n^{-2}} = 1.$$

e.g. 2

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & : \ |r| < 1 \\ 1 & : \ r = 1 \\ \infty & : \ r > 1 \\ \text{発散（振動）} & : \ r < -1. \end{cases}$$

〈実数の重要な性質〉 （証明略）

1° 有界単調な実数列は収束する.

i.e.

$$\left.\begin{array}{l} a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq M \ (\text{const}) \\ a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq M \ (\text{const}) \end{array}\right\} \to \{a_n\} \text{ は収束する.}$$

2019/

2° 〈supとinfの定義〉 $X \subset \mathbb{R}$ 集合.

（max, min と区別すること）

(i) $a \in \mathbb{R}$ は X の上界である $\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ $x \leqq a$ $(\forall x \in X)$

X の上限 $\sup X \equiv \min\{X \text{の上界}\}$
(supremum)
$= \min\{a \in \mathbb{R} \mid x \leqq a \ (\forall x \in X)\}$

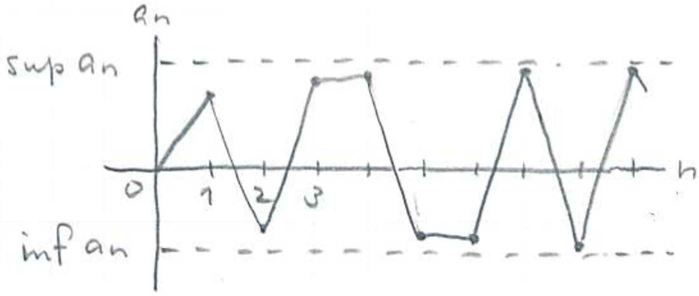
(ii) $b \in \mathbb{R}$ は X の下界である $\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ $x \geqq b$ $(\forall x \in X)$

X の下限 $\inf X \equiv \max\{X \text{の下界}\}$
(infimum)
$= \max\{b \in \mathbb{R} \mid x \geqq b \ (\forall x \in X)\}$

この min, max が必ず存在するのが $\mathbb{R}$ の性質である.

* 上の $\min\{\cdots\}$, $\max\{\cdots\}$ が存在しないとき,
それぞれ $\sup X = +\infty$, $\inf X = -\infty$ と定める.

集合 X が実数列 $\{a_n\}$ の項から成るとき,
$\sup a_n = \sup X$, $\inf a_n = \inf X$ と記す.



3° 〈実数の完備性〉

数列 $\{a_n\}$ は Cauchy 列（基本列）である.

$\overset{d}{\Longleftrightarrow}$ $\displaystyle\lim_{m,n\to\infty} |a_m - a_n| = 0$

i.e., $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $|a_m - a_n| < \varepsilon$ $(\forall m, n \geqq n_0)$.

2019/

収束列はCauchy列である(これは自明)

∵ $\{a_n\}$ を収束列とし、$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とする。

$$|a_m - a_n| = |(a_m - a) + (a - a_n)|$$
$$\leqq |a_m - a| + |a - a_n| \to 0 \quad (m, n \to \infty).$$

あるいは、

$\varepsilon > 0$ を任意にとると、$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(\forall n \geqq n_0)$.

これより、$m, n \geqq n_0$ ならば

$$|a_m - a_n| \leqq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \boxtimes$$

逆に、

| 実数のCauchy列は必ず収束する。 | … 実数の完備性 |

* 有理数体 $\mathbb{Q}$ は完備性を満たさない。

e.g. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$.

$\{a_n\}$ は $\mathbb{Q}$ の数列、$\mathbb{R}$ において $a_n \to e$ ($= 2.718\cdots$ Napierの数)

よって、$\{a_n\}$ は $\mathbb{Q}$ のCauchy列である。

しかし、$e \notin \mathbb{Q}$ であるから、$\{a_n\}$ は $\mathbb{Q}$ の収束列ではない。 □

2019/

2. 無限級数

無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$

その値 … 部分和 により定義する。

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$$ とおく。

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \equiv \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n .$$

この値が存在するとき、無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束するという。

〈性質〉 1° $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束するとき、

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (c : \text{const.}) .$$

2° $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

∵ 1° $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$, $T_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$ とおけば

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (a_n + b_n) = \lim_{N\to\infty} (S_N + T_N)$$

$$= \lim_{N\to\infty} S_N + \lim_{N\to\infty} T_N = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n , \quad \text{etc.}$$

2° $a_N = S_N - S_{N-1} \to \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) = 0 \quad (n \to \infty)$. ☒

e.g. α : const.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} : & |\alpha| < 1 \\ \text{発散} : & |\alpha| \geq 1 \end{cases}$$ … これはよく使う。

2019/

3. 正項級数

正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ … $a_n \geqq 0\ (\forall n)$ なる無限級数.

＜正項級数の収束判定法＞

1° 比較判定法

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$: 正項級数.

$a_n \leqq b_n\ (\forall n)$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

$\because$ $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$, $M = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ とおくと,

$S_0 \leqq S_1 \leqq S_2 \leqq \cdots \leqq M < \infty$ であるから, $\{S_N\}$ は有界単調列である.

ゆえに, $\{S_N\}$ は収束列である. i.e., $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$. ☒

2° Cauchy の判定法

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$: 正項級数, $r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$.

$0 < r < 1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

$r > 1$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

($r = 1$ の場合はどちらとも言えない. ケースバイケース)

rem. 極限 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ が存在するなら, $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

* 実数列 $\{a_n\}$ の上極限・下極限

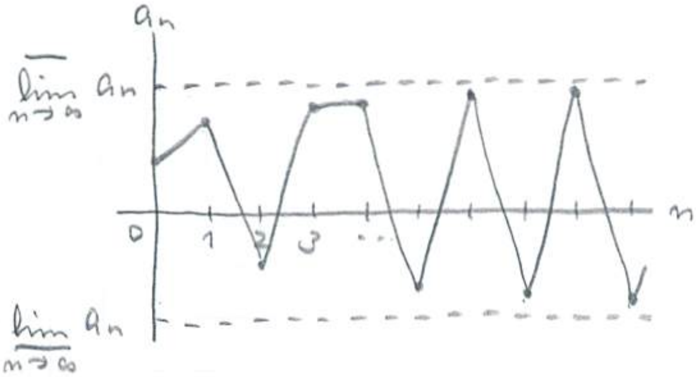
(${\{\sup_{k\geqq n} a_k\}}_n$, ${\{\inf_{k\geqq n} a_k\}}_n$ は n について単調減少/増加. よって, ($\pm\infty$ も含めて) $\lim$ は存在する.)

上極限 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \equiv \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqq n} a_k$,

下極限 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n \equiv \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqq n} a_k$.

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ は任意の実数列 $\{a_n\}$ に対し存在する.

2019/



☆ $\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t.

$\begin{cases} a_n < \alpha + \varepsilon & (\forall n \geqq n_0) \\ \text{無限個の } n \text{ に対し } a_n > \alpha - \varepsilon. \end{cases}$

$\beta = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t.

$\begin{cases} a_n > \beta - \varepsilon & (\forall n \geqq n_0) \\ \text{無限個の } n \text{ に対し } a_n < \beta + \varepsilon \end{cases}$

(Cauchyの判定法の証明)

(直観的イメージ) 十分大きいnに対し$a_n \approx r^n$であるから、

$$\sum a_n \approx \sum r^n \begin{cases} \text{収束}: & r < 1 \\ \text{発散}: & r > 1 \end{cases}$$

(ちゃんとした証明)

・$r < 1$ の場合、$\varepsilon > 0$ を $r + \varepsilon < 1$ となるよう任意にとる。このとき、

$\sqrt[n]{a_n} < r + \varepsilon \ (\forall n \geqq n_0)$, よって、$a_n < (r+\varepsilon)^n \ (\forall n \geqq n_0)$.

$r + \varepsilon < 1$ より $\sum_{n=n_0}^{\infty} (r+\varepsilon)^n < \infty$ であるから、比較判定法より

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する。

・$r > 1$ の場合、$\varepsilon > 0$ を $r - \varepsilon > 1$ となるよう任意にとる。このとき、自然数列 $n(1) < n(2) < \cdots$ が存在して、$\sqrt[n(k)]{a_{n(k)}} > r - \varepsilon$, よって、

$a_{n(k)} > (r-\varepsilon)^{n(k)} \geqq (r-\varepsilon)^k \ (k = 1, 2, \cdots,\ n(k) \geqq k$ に注意$)$.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n(k)} \geqq \sum_{k=0}^{\infty} (r-\varepsilon)^{n(k)} \geqq \sum_{k=0}^{\infty} (r-\varepsilon)^k = \infty$ ゆえに、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する。 ⊠

3° <u>d'Alembert の判定法</u>.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$: 正項級数.

極限 $r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ が存在すると仮定する.

このとき,

$$\begin{cases} r<1 \text{ ならば } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ は収束する} \\ r>1 \text{ ならば } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ は発散する.} \end{cases}$$

∵ ・ $r<1$ の場合,

$\varepsilon>0$ を $r+\varepsilon<1$ となるよう任意にとる.

このときある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r+\varepsilon \quad (\forall n \geq n_0).$$

よって,

$$a_n < (r+\varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0} \quad (\forall n \geq n_0).$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq a_{n_0} \sum_{n=n_0}^{\infty} (r+\varepsilon)^{n-n_0} = a_{n_0} \sum_{k=0}^{\infty} (r+\varepsilon)^k < \infty$$

により $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する.

・ $r>1$ の場合,

$\varepsilon>0$ を $r-\varepsilon>1$ となるよう任意にとる.

このとき, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > r-\varepsilon \quad (\forall n \geq n_0)$$

よって,

$$a_n > (r-\varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0} \quad (\forall n \geq n_0)$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \geq a_{n_0} \sum_{n=n_0}^{\infty} (r-\varepsilon)^{n-n_0} = a_{n_0} \sum_{k=0}^{\infty} (r-\varepsilon)^k = \infty$$

により $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する. ⊠

4° Euler-Maclaurin の判定法

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ： 正項級数．

$f(x)$ $(0 \leqq x < \infty)$ ： $f(x) \geqq 0$ \ なる単調減少かつ連続関数．

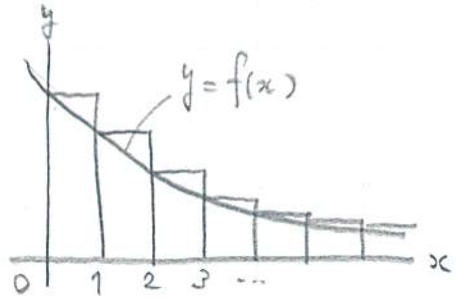
$f(n) = a_n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

このとき，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty \iff \int_0^{\infty} f(x)\,dx < \infty .$$

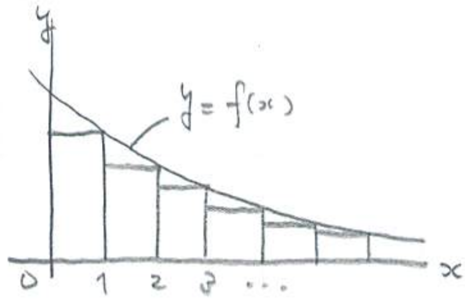
$\because$ $(\Rightarrow)$ 右図 より

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx \leqq \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty .$$



$(\Leftarrow)$ 右図 より

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqq \int_0^{\infty} f(x)\,dx < \infty .$$



$\boxtimes$

2019/

* 上極限の性質(☆)の証明.

($\Longrightarrow$) $\varepsilon > 0$ を任意にとる. このとき, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$\alpha - \varepsilon < \sup_{k \geqq n} a_k < \alpha + \varepsilon \quad (\forall n \geqq n_0)$$

右側の不等号より $\sup_{k \geqq n_0} a_k < \alpha + \varepsilon$ $\therefore$ $a_n < \alpha + \varepsilon \ (\forall n \geqq n_0)$.

左側の不等号より $\sup_{k \geqq n} a_k > \alpha - \varepsilon \ (\forall n \geqq n_0)$.

したがって, 各 $n \geqq n_0$ に対し $a_{k(n)} > \alpha - \varepsilon$, $k(n) \geqq n$ なる $k(n)$ が存在する. よって, 無限個の n に対し $a_n > \alpha - \varepsilon$ が成り立つ.

($\Longleftarrow$) $\varepsilon > 0$ を任意にとる. 仮定より, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$a_n < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall n \geqq n_0)$$

したがって, $n \geqq n_0$ ならば $\sup_{k \geqq n} a_k \leqq \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$,

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n = \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geqq n} a_k \leqq \alpha + \frac{\varepsilon}{2} < \alpha + \varepsilon.$$

一方, 無限個の n に対し $a_n > \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つので,

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\sup_{k \geqq n} a_k > \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$,

$$\therefore \ \overline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n = \lim_{n \to \infty} \sup_{k \geqq n} a_k \geqq \alpha - \frac{\varepsilon}{2} > \alpha - \varepsilon.$$

以上より

$$\alpha - \varepsilon < \overline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n < \alpha + \varepsilon.$$

$\varepsilon > 0$ は任意なので, $\overline{\lim_{n \to \infty}}\, a_n = \alpha$. $\boxtimes$

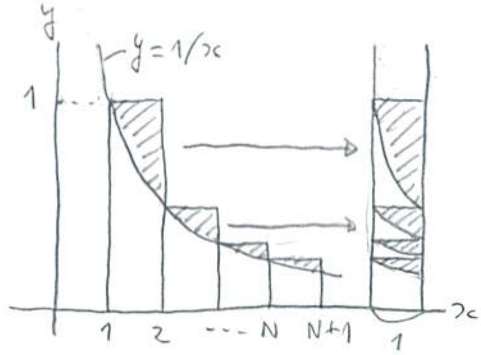
2019/

〈Euler定数〉

$$\gamma \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)=0.57721\ 56649\ldots$$

極限が存在すること.

$$S_N \equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}-\log(N+1).$$



右図より

$$0<S_1<S_2<\cdots<S_N<\cdots\leq 1$$

であるから，$\{S_N\}$ は上に有界な単調増加列である．よって，$\lim_{N\to\infty} S_N$ が存在する．ゆえに，

$$\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\log N\right)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left(S_N+\log\frac{N+1}{N}\right)=\lim_{N\to\infty}S_N$$

であり，題意の極限は存在する． ☒

＊ γ の数論的性質はよくわかっていない（有理数であるか否かさえ不明）．

〈例題〉 次の正項級数は収束するか？

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$，　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$，　(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\ (p>0)$． □

(解) (1, 2) 題意の級数を $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ とおく．

(1) Cauchy の判定法を使う．

$$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}<1.$$

よって，収束する．

(2) d'Alembert の判定法を使う。

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} < 1.$$

よって，収束する。

(3) Euler-Maclaurin の判定法を使う。

$f(x) = \frac{1}{x^p}$ とおくと，$p \neq 1$ の場合

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \left[-\frac{1}{p-1}\frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^\infty = \begin{cases} \frac{1}{p-1} < \infty & (p>1) \\ \text{発散} & (0<p<1) \end{cases}$$

積分区間に注意

$p = 1$ の場合，$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x} = \left[\log x\right]_1^\infty = \infty.$

ゆえに，$\boxed{\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}\ (p>0) \text{ は，} p>1 \text{ の場合収束し，} 0<p\leq 1 \text{ の場合発散する．}}$

* Riemann の zeta（ゼータ）関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ $(\mathrm{Re}\, s > 1)$.

$\zeta(2) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$，$\zeta(4) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

一般に，$\zeta(2m) = (\text{有理数}) \times \pi^{2m}$ $(m = 1, 2, \cdots)$.

一方，$\zeta(\text{奇数})$ の数論的性質はあまりよくわかっていない。

2019/

4. 交代級数

<u>交代級数</u> $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$, $a_n \geqq 0$ $(n=0,1,2,\cdots)$.

<u>Leibniz の定理</u>（ライプニッツ）

交代級数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ $(a_n \geqq 0)$ は, $\{a_n\}$ が単調減少で

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ならば収束する. $\square$

$\because$ $S_N = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n$ （部分和）.

$$S_{2N+1} = \underbrace{(a_0 - a_1)}_{\geqq 0} + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geqq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2N} - a_{2N+1})}_{\geqq 0} \geqq 0,$$

$$S_{2N+1} = a_0 - \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geqq 0} - \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geqq 0} - \cdots - \underbrace{(a_{2N-1} - a_{2N})}_{\geqq 0} - \underbrace{a_{2N+1}}_{\geqq 0}$$

$$\leqq a_0 < \infty$$

により, $\{S_{2N+1}\}$ は上に有界な単調増加列なので収束する.

$$\lim_{N\to\infty} S_{2N} = \lim_{N\to\infty}(S_{2N-1} + a_{2N})$$

$$= \lim_{N\to\infty} S_{2N-1} + \lim_{N\to\infty} a_{2N} = \lim_{N\to\infty} S_{2N+1}.$$

ゆえに, 極限 $\lim_{N\to\infty} S_N$ は存在する. $\boxtimes$

<u>e.g.</u> $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$,

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$.

（→ Taylor級数）

2019/

5. 絶対収束

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ は収束する。
(absolutely convergent)

定理 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束するならば、もとの級数も収束する。 □

∵ 実数の完備性を使う。

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n, \quad T_N = \sum_{n=0}^{N} |a_n| .$$

$M < N$ のとき、

$$|S_N - S_M| = \left|\sum_{n=M+1}^{N} a_n\right| \leq \sum_{n=M+1}^{N} |a_n| = |T_N - T_M| \to 0 \quad (M, N \to \infty)$$

(∵ $\{T_N\}$ は収束列 ⇒ Cauchy列).

ゆえに、$\{S_N\}$ は実数の Cauchy列 なので、収束する。 ⊠
(複素数)

定理 複素数列 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束するならば、その項の順序を入れ換えた級数ももとの $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と同じ値に収束する。すなわち、

全単射 $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ $(\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$ に対し

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . \quad □$$

(証明) 3ステップに分ける。

1° $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が正項級数の場合。

各 $N \in \mathbb{N}_0$ に対し $f(N) = \max\{\varphi(0), \varphi(1), \cdots, \varphi(N)\}$ とおくと、

$\{\varphi(0), \cdots, \varphi(N)\} \subset \{0, 1, 2, \cdots, f(N)\}$ であるから、

$$\sum_{n=0}^{N} a_{\varphi(n)} \leq \sum_{n=0}^{f(N)} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty .$$

2019/

よって，$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n$．

一方，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ の項の順序を入れ換えたものだから，

同じ議論により $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ が成り立つ．

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

2° $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が一般の実数列の場合．

$$a_n^+ \equiv \begin{cases} a_n & (a_n \geq 0) \\ 0 & (a_n < 0) \end{cases}, \quad a_n^- \equiv \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ |a_n| & (a_n < 0) \end{cases}$$

とおくと，$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$ で $\sum a_n^\pm$ は絶対収束する正項級数だから，1° より

$$\sum a_{\varphi(n)} = \sum a_{\varphi(n)}^+ - \sum a_{\varphi(n)}^-$$
$$= \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum a_n .$$

3° $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が一般の複素数列の場合．

$$\sum a_n = \sum \mathrm{Re}\, a_n + i \sum \mathrm{Im}\, a_n ,$$

$\sum \mathrm{Re}\, a_n$, $\sum \mathrm{Im}\, a_n$ に 2° を適用すればよい．

$\boxtimes$

2019/

定理(Cauchy) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$: 絶対収束する複素級数,

このとき,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$$

とおくと,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_i b_j = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right). \qquad \square$$

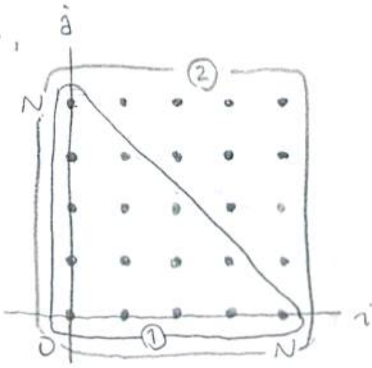
(証明) 3ステップに分ける.

1° $\sum a_n$, $\sum b_n$ が正項級数の場合,

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{(i,j)\in ①} a_i b_j$$

$$\leq \sum_{(i,j)\in ②} a_i b_j = \left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right)$$

(右図参照).



添字の組(i,j)の存在範囲

$N \to \infty$ として,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_i b_j \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

同様の考察により,

$$\left(\sum_{n=0}^{N} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n\right) \leq \sum_{n=0}^{2N} \sum_{i+j=n} a_i b_j.$$

$N \to \infty$ として,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_i b_j.$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_i b_j = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

2019/

2° $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が一般の絶対収束する実数の級数の場合.

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-, \quad \sum b_n = \sum b_n^+ - \sum b_n^-,$$

$\sum a_n^\pm$, $\sum b_n^\pm$ は収束する正項級数であるから, 1° より

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^-\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} b_n^-\right)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^+\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^-\right)$$

$$- \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^+\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^-\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_i^+ b_j^+ - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_i^+ b_j^- - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_i^- b_j^+$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_i^- b_j^-$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left(a_i^+ b_j^+ - a_i^+ b_j^- - a_i^- b_j^+ + a_i^- b_j^-\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \left(a_i^+ - a_i^-\right)\left(b_j^+ - b_j^-\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_i b_j .$$

3° $\sum a_n$, $\sum b_n$ が一般の絶対収束する複素級数の場合

$$\sum a_n = \sum \mathrm{Re}\, a_n + i \sum \mathrm{Im}\, a_n,$$
$$\sum b_n = \sum \mathrm{Re}\, b_n + i \sum \mathrm{Im}\, b_n,$$

$\sum \mathrm{Re}\, a_n$, $\sum \mathrm{Im}\, a_n$, $\sum \mathrm{Re}\, b_n$, $\sum \mathrm{Im}\, b_n$ は絶対収束する実数級数である. 後の考察は 2° と同様.

$\boxtimes$

2019/

〈Cauchy の定理の使い方〉

冪(べき)級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

"収束半径" R_1, R_2 ($0 \leq R_1, R_2 \leq \infty$) という量があり、

$\sum a_n x^n$ は $|x| < R_1$ で $\sum b_n x^n$ は $|x| < R_2$ で絶対収束する

（後の授業参照）.

$|x| < \min(R_1, R_2)$ のとき,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} a_i x^i \cdot b_j x^j$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) x^{i+j} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) x^n,$$

i.e.,

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots)$$

$$= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + \cdots .$$