2019/

6. 冪(べき)級数

冪(べき)級数 (power series)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$$

今後，簡単のため $a=0$ とおいて議論する：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots .$$

命題 冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ について，

1) $x = x_0$ で収束すれば，$|x| < |x_0|$ なる x に対し絶対収束する．
2) $x = x_1$ で発散すれば，$|x| > |x_1|$ なる x に対し発散する． □

∵ 1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ が収束するなら $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ なので，

ある定数 M が存在して $|a_n x_0^n| \leq M$ ($\forall n \in \mathbb{N}_0$).

よって，$|x| < |x_0|$ ならば

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < \infty .$$

ゆえに，$\sum a_n x^n$ は絶対収束する．

2) もしある x_2 ($|x_2| > |x_1|$) に対し $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ が収束すると

仮定すると，1) より $\sum a_n x_1^n$ は(絶対)収束するので矛盾． ⊠

この命題より，冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ に対しある R ($0 \leq R \leq \infty$) が存在し，

1) $|x| < R$ なら $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する．

2) $|x| > R$ なら $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は発散する．

R … $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の <u>収束半径</u>

2019/

* $R=\infty$ … すべての x に対し $\sum a_n x^n$ は絶対収束する。
$R=0$ … すべての $x \neq 0$ に対し $\sum a_n x^n$ は発散する。

＜収束半径の求め方＞

<u>定理</u>（Cauchy-Hadamard）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 冪級数

$r=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ とおくと、収束半径 $R=\frac{1}{r}$。 □

（極限 $r=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ が存在すれば、$R=\frac{1}{r}$。）

（証明）$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が収束するとき、x が満たすべき条件を求める。

$\lim_{n\to\infty} a_n x^n = 0$ より $M \equiv \sup_n |a_n x^n| < \infty$.

$$\sqrt[n]{|a_n|}\,|x| \leq M^{1/n}$$

$n\to\infty$ として、

$$r|x| \leq 1. \quad \text{——①}$$

よって、$\sum a_n x^n$ が収束するならば、x は①を満たさなければならない。

$|x|<r^{-1}$ ならば $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=\left(\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}\right)|x|=r|x|<1$ で

あるから、正項級数の収束判定条件（Cauchy）より $\sum a_n x^n$ は絶対収束する。

一方、$|x|>r^{-1}$ ならば、

$$\sum a_n x^n \text{ は収束} \Rightarrow |x| \leq r^{-1}$$

の対偶になることより、$\sum a_n x^n$ は発散する。

これは、r^{-1} が $\sum a_n x^n$ の収束半径であることを意味する。

2019/

定理（d'Alembert）. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 冪級数

極限 $r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ が存在するならば，収束半径 $R = \frac{1}{r}$. □

∵ $\varepsilon > 0$ を任意にとる. ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq n_0$ ならば

$$\left| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} - r \right| < \varepsilon, \quad \text{よって,} \quad (r-\varepsilon)|a_n| < |a_{n+1}| < (r+\varepsilon)|a_n|.$$

これより，$(r-\varepsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}| < |a_n| < (r+\varepsilon)^{n-n_0}|a_{n_0}| \quad (n \geq n_0)$，

$$(r-\varepsilon)^{1-n_0/n} \sqrt[n]{|a_{n_0}|} < \sqrt[n]{|a_n|} < (r+\varepsilon)^{1-n_0/n} \sqrt[n]{|a_{n_0}|} \quad (n \geq n_0).$$

上極限をとって，$r - \varepsilon \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq r + \varepsilon$.

$\varepsilon > 0$ は任意であるから，$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = r$. ☒

〈例〉（p28. 問1.8）

次の冪級数の収束半径を求めよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n^2} x^n$，　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n$，

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n\, n!} x^n = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\,\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$，

ここで，$\alpha, \beta, \gamma \notin \{0, -1, -2, \cdots\}$，

$(a)_0 = 1$，$(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) \quad (n = 1, 2, \cdots)$

（… Gaussの超幾何級数）

＊ $(a)_n$ … Pochhammer（ポッホハンマー）の記号

2019/

(解) 題意の級数を $\sum a_n x^n$ とおく.

(1) Cauchy-Hadamard の定理を用いる.

$$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e$$

より, 収束半径 $R = \frac{1}{r} = e$.

(2) d'Alembert の定理を用いる.

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 3\,\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 3\left(1+\frac{1}{n}\right) = 3$$

より, 収束半径 $R = \frac{1}{r} = \frac{1}{3}$.

(3) d'Alembert の定理を用いる.

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\alpha n^{-1})(1+\beta n^{-1})}{(1+n^{-1})(1+\gamma n^{-1})} = 1$$

より, 収束半径 $R = \frac{1}{r} = 1$. ☒

一様収束

連続関数列 $\{f_n(x)\}$ に対し次の(1)〜(3)は常に成り立つか？

(1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は連続か？

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ ？

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\}'$ ？

特に、冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ に対し(1)〜(3)は成立するか？

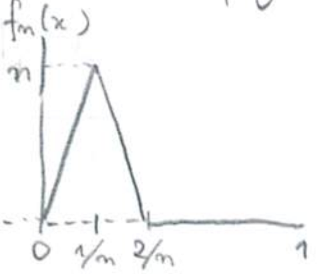
<(1)〜(3)が成立しない例>

(1) $f_n(x) = x^n \quad (0 \leqq x \leqq 1)$ … 連続関数

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leqq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$ … 連続でない。

(2)

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & (0 \leqq x \leqq 1/n) \\ n^2(2/n - x) & (1/n \leqq x \leqq 2/n) \\ 0 & (2/n \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$ … 連続関数



$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1, \quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx. \qquad \square$$

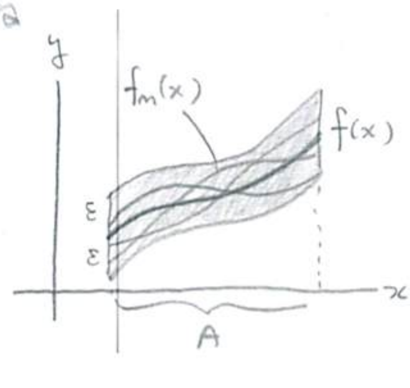
<一様収束> $f_n(x), f(x)$: $A(\subset \mathbb{R})$ 上の関数

A上 $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束する
(uniformly convergent)

$\overset{\text{d}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t.

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in A, \ \forall n \geqq n_0)$

この n_0 は $x \in A$ に依存しない。



＜一様収束に関する定理＞

定理1 $f_n(x), f(x) : A (\subset \mathbb{R})$ 上の関数
$f_n(x)$: A 上連続
$f_n(x) \to f(x)$ (A上一様収束)
$\Downarrow$
$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ もA上連続である □

連続関数列の一様収束極限は連続である。

(証明) $\varepsilon > 0$ を任意にとる。
$f_n(x) \to f(x)$ (A上一様) より
$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ($\forall x \in A, \forall n \geq n_0$).

$n \geq n_0$ なる n をひとつとって固定する。
$x_0 \in A$ を任意にとって固定する。
$f_n(x)$ は $x_0 \in A$ において連続であるから、
$\exists \delta > 0$ s.t. $x \in A, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

以上より、$x \in A, |x - x_0| < \delta$ ならば

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

となり、$f(x)$ は $x_0 \in A$ で連続である。
$x_0 \in A$ は任意であるから、$f(x)$ は A で連続である。 ☒

定理2 $f_n(x), f(x) : A (\subset \mathbb{R})$ 上の関数。
$f_n(x) \to f(x)$ (A上一様収束)
$\Downarrow$
任意の有界閉区間 $[a, b] \subset A$ に対して
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$ □

一様収束するならば, $\lim$ と $\int_a^b \cdot\, dx$ は可換である.

(証明) $\varepsilon > 0$ を任意にとる. $f_n(x) \to f(x)$ (A 上一様) より

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t. $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ ($\forall x \in A,\ \forall n \geq n_0$).

よって, $n \geq n_0$ ならば

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)]\,dx \right|$$
$$\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \qquad \boxtimes$$

"$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\}'$?" は少々面倒である.

<u>定理3</u> $f_n(x)$: 区間 I 上の関数列.

1) $f_n(x)$ は I 上 C^1 級である.

2) I 上のある関数 $g(x)$ が存在して, 任意の有界閉区間 $K \subset I$ に対し

$f_n'(x) \to g(x)$ (K 上一様収束)

3) ある $c \in I$ に対し $\lim_{n\to\infty} f_n(c)$ が存在する.

$\Downarrow$

i) I 上のある関数 $f(x)$ が存在し, 任意の有界閉区間 $K \subset I$ に対し

$f_n(x) \to f(x)$ (K 上一様収束)

ii) $f(x)$ は I 上微分可能で

$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ ($\forall x \in I$). $\qquad \square$

(証明) 有界閉区間 $[a, b] \subset I$ を任意にとる. $c \in [a, b]$ としても一般性を失わない.

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} f_n(c),$$

$$f(x) = \int_c^x g(\xi)\,d\xi + \gamma \qquad \text{——} ①$$

とおく.

$\varepsilon > 0$ を任意にとる. $f_n'(x) \to g(x)$ ($[a, b]$ 上一様),

$\lim_{n\to\infty} f_n(c) = \gamma$ であるから,

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ s.t.

$$|f_n'(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (\forall x \in [a, b],\ \forall n \geqq n_0),$$

$$|f_n(c) - \gamma| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall n \geqq n_0)$$

である.

$$f_n(x) = \int_c^x f_n'(\xi)\,d\xi + f_n(c)$$

を用いると, $x \in [a, b]$, $n \geqq n_0$ のとき,

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &\leqq \left| \int_c^x [f_n'(\xi) - g(\xi)]\,d\xi + [f_n(c) - \gamma] \right| \\ &\leqq \int_c^x |f_n'(\xi) - g(\xi)|\,d\xi + |f_n(c) - \gamma| \\ &\leqq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}|x - c| + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \varepsilon\end{aligned}$$

である. ゆえに i) が示された.

ii) は ① と $f_n'(x) \to g(x)$ からわかる. $\boxtimes$

定理4 (Weierstrass の M-判定法)

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$: $A(\subset \mathbb{R})$ 上の関数項級数

ある正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$ が存在し

$$|f_n(x)| \leqq M_n \quad (\forall x \in A,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

$$\Downarrow$$

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ は A 上絶対かつ一様収束する. □

(証明) $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$ より $\left\{S_N \equiv \sum_{n=0}^{N} M_n\right\}_N$ は Cauchy 列であるから,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \text{s.t.} \ \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon \quad (\forall n > \forall m \geqq n_0).$$

これより

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leqq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in A,\ \forall n > \forall m \geqq n_0). \text{ —①}$$

これは, 任意の $x \in A$ に対し $\left\{F_N(x) \equiv \sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right\}_N$,

$\left\{G_N(x) \equiv \sum_{n=0}^{N} |f_n(x)|\right\}_N$ が Cauchy 列であることを示している.

$\mathbb{R}$ の完備性より, 各 $x \in A$ に対し $F(x) = \lim_{N\to\infty} F_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$,
$G(x) = \lim_{N\to\infty} G_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ が存在する. ① は

$$|F_n(x) - F_m(x)| \leqq |G_n(x) - G_m(x)| < \varepsilon \quad (\forall x \in A,\ \forall n > \forall m \geqq n_0)$$

と書けるが, $n \to \infty$ とすれば

$$|F(x) - F_m(x)| \leqq |G(x) - G_m(x)| \leqq \varepsilon \quad (\forall x \in A,\ \forall m \geqq n_0)$$

を得る. これは $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ が A 上絶対かつ一様収束することを示している.

⊠

冪級数の一様収束

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: 冪級数, 収束半径 $R>0$.

定理5 任意の R' $(0<R'<R)$ に対し $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| \leqq R'$ で絶対かつ一様収束する.

これと定理1より

定理6 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x|<R$ で連続である.

(定理5の証明) $R'<|x_0|<R$ なる x_0 をとっておく. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ は絶対収束するので, $A \equiv \sup_m |f_m(x_0)| < \infty$ である. $|x| \leqq R'$ なる x に対し

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqq A\left(\frac{R}{|x_0|}\right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{|x_0|}\right)^n < \infty$$

であるから, Weierstrass の M-判定法より, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| \leqq R'$ で絶対かつ一様収束する. ☒

冪級数の項別積分可能性

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: 冪級数, 収束半径 $R>0$.

上記より任意の R' $(0<R'<R)$ に対し $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| \leqq R'$ で絶対かつ一様収束するから, $\sum a_n x^n$ は $|x| \leqq R'$ で項別積分可能である, i.e.,

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n \xi^n \, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (\forall x \in (-R, R)).$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ の収束半径は

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{a_n}{n+1} \right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{-1/n} \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}$$

であるから，R である．

<u>定理7</u>

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n \xi^n d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (\forall x \in (-R, R)).$$

そして，右辺の冪級数の収束半径は，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と同じであり，R である．　□

冪級数の項別微分可能性

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ : \ 冪級数，収束半径 \ R > 0.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ を形式的に項別微分して得られる冪級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ を考える．

$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径は

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |n a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}$$

により R である（$\sum a_n x^n$ と同じ）．よって，定理5より任意の R' $(0 < R' < R)$ に対し $\sum n a_n x^{n-1}$ は $|x| \leq R'$ で絶対かつ一様収束する．

それに，

・ $\left\{ \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right\}' = \sum_{n=1}^{N} n a_n x^{n-1}$，（有限和に対しては項別微分可能は自明である）．

・ c $(|c| \leq R')$ に対し $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ は存在する．

ゆえに，定理3より次の定理を得る．

定理8

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right\}' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (|x| < R).$$

$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径は、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と同じ R である。

同じ議論を繰り返して、

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は無限回(項別)微分可能で、それらの導関数の収束半径は $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と同じ R である。