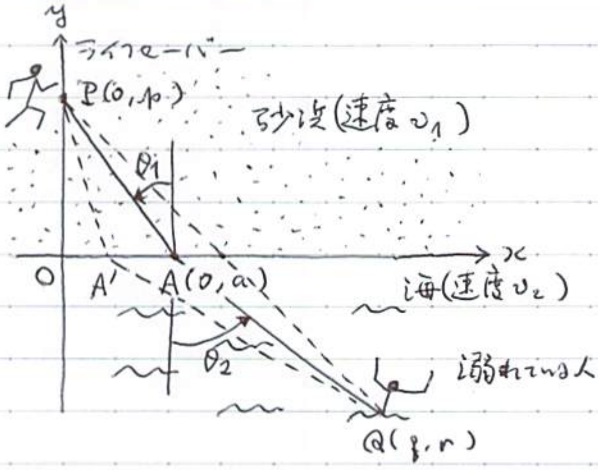
1章 変分法の基礎

1.1 序論 ―変分問題の例―

ライフセーバーの問題



ライフセーバーが溺れている人にたどり着くにはどの経路をとれば最短時間で着けるか?

$v_1 < v_2 \longrightarrow$ 砂浜の部分を短くした方がよい。
まっすぐ進むよりはPAQの方がよい。
しかし、砂浜の部分を短くしすぎると(PA'Q)、かえって時間がかかる。

どこかに最適な点Aがあるはず。

所要時間 $T(a) = \dfrac{\sqrt{a^2+p^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{(q-a)^2+r^2}}{v_2}$.

$T(a)$が最小となるaを探す。

$$T'(a) = \frac{a}{v_1\sqrt{a^2+p^2}} - \frac{q-a}{v_2\sqrt{(q-a)^2+r^2}} = 0$$

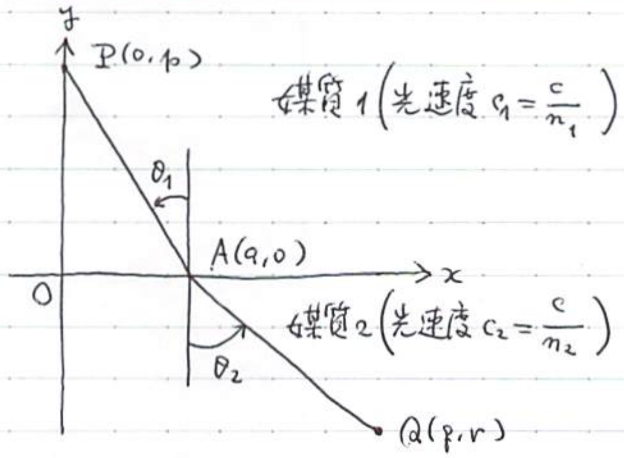
…これをみたすaに対し$T(a)$は最小となる。

上式を書き直すと、

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}.$$

光学の問題

Fermatの原理　光は到達時間が最小となる経路を選んで進む。



PからQまでの光の経路は?

光の到達時間

$$T(a) = \frac{\sqrt{a^2+p^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(q-a)^2+r^2}}{c_2}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2+p^2}}{c/n_1} + \frac{\sqrt{(q-a)^2+r^2}}{c/n_2}.$$

点$A(a,0)$ … $T(a)$を最小にする。

↓

ライフセーバーの問題と同じ

(1.1)

$$T'(a) = \frac{a}{c_1\sqrt{a^2+p^2}} - \frac{\xi - a}{c_2\sqrt{(\xi-a)^2+r^2}}$$

$$= \frac{1}{c}\left\{ \frac{n_1 a}{\sqrt{a^2+p^2}} - \frac{n_2(\xi-a)}{\sqrt{(\xi-a)^2+r^2}} \right\} = 0.$$

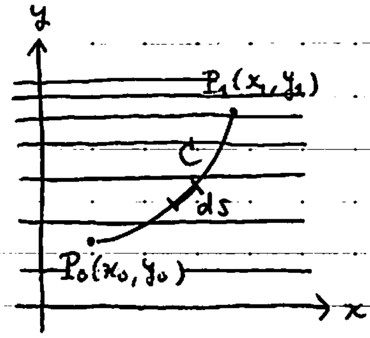
点 $A(a,0)$ が上式を満たすような光路が選ばれる。
上式を書き直すと、

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2},$$

i.e.,

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$ … <u>Snellの法則</u>

より複雑な問題を考える。
3種類の媒質、4種類の媒質、…
↓
一様でない媒質を通過する光



始点を $P_0(x_0, y_0)$、終点を $P_1(x_1, y_1)$ とすると、光の経路 $C: y = y(x)$ はどのようになるか？

光の到達時間

$$T = \int_C \frac{ds}{c/n} = \frac{1}{c}\int_C n\, ds$$

$$= \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x_1} n(y(x))\sqrt{1+y'(x)^2}\, dx.$$

↑

Fermatの原理より、これが最小になるような経路 $C: y = y(x)$ が選ばれる。

媒質は y 方向にのみ変化
屈折率 $n = n(y)$.
(光速度 $c/n(y)$)

T … 関数 $y(x)$ の関数 = 汎関数 (functional)
汎関数を最小にするような関数を求める問題 … 変分問題

1.2 汎関数とEuler-Lagrange方程式

汎関数(functional) …関数の関数

関数 $y=y(x)$ を"引数"にもつ汎関数 ⟶ $I[y]$ などの記号で表す.

積分汎関数

$$I[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y(x),y'(x))\,dx$$

(例: 光学の問題では $F(x,y,y')=n(y)\sqrt{1+(y')^2}$)

変分問題(variational problem)

…汎関数を最大または最小にするような関数を求める問題

変分法(variational method)

…変分問題を解く方法

問題 汎関数

$$I[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\,dx$$

を最小にするような関数 $y=y(x)$ を境界条件

$y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$ (y_0, y_1 は与えられた数)

のもとで求めよ. □

問題の解: $y(x)$

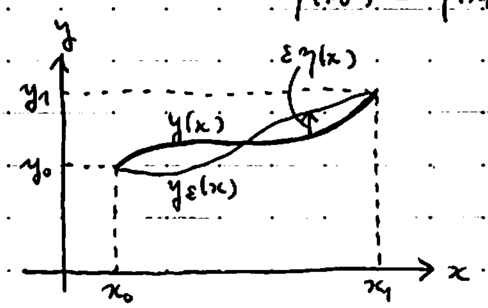
比較関数 …解から少しずれた関数

$y_\varepsilon(x)=y(x)+\varepsilon\eta(x)$,

ε: 微小パラメータ

$\eta(x)$: 任意関数, ただし, $y_\varepsilon(x_0)$, $y_\varepsilon(x_1)$ は固定されるので

$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$



(1.2)

$\tilde{I}(\varepsilon) \equiv I[y_\varepsilon]$ とおくと，$\tilde{I}(\varepsilon)$ は $\varepsilon=0$ で最小となるので
$$\tilde{I}'(\varepsilon=0)=0.$$

$\tilde{I}'(\varepsilon)$ を計算する．
$$\tilde{I}'(\varepsilon)=\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_\varepsilon,y'_\varepsilon)\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x,y_\varepsilon,y'_\varepsilon)\,dx$$
$$=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial y_\varepsilon}+\frac{\partial y'_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial y'_\varepsilon}\right)dx=\int_{x_0}^{x_1}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial y_\varepsilon}+\eta'\frac{\partial F}{\partial y'_\varepsilon}\right)dx.$$

$\varepsilon=0$ とおいて，
$$\tilde{I}'(0)=\int_{x_0}^{x_1}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial y}+\eta'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx=0.$$

部分積分より
$$\tilde{I}'(0)=\underbrace{\left[\eta\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x=x_0}^{x_1}}_{0\ (\because\ \eta(x_0)=\eta(x_1)=0)}+\int_{x_0}^{x_1}\eta\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}dx=0$$

$$\therefore\quad \int_{x_0}^{x_1}\eta\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}dx=0 \quad \text{for } {}^\forall\eta(x) \text{ s.t. } \eta(x_0)=\eta(x_1)=0.$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \quad \cdots \text{Euler-Lagrange 方程式}}$$

変分問題の解は Euler-Lagrange 方程式を満たす．

停留関数 (stationary function)
　… Euler-Lagrange 方程式を満たす関数

（Euler-Lagrange 方程式のもう一つの導出の仕方）

問題　積分汎関数

$$I[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,dx$$

を境界条件

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1$$

のもとで最小にするような関数 $y(x)$ を求めよ。 □

$y(x)$ ： 解

$y(x)+\delta y(x)$ ： 解から微小にずれた関数

$$\delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0.$$

$y(x)$ が変分問題の解であることから、

$$\delta I\equiv I[y+\delta y]-I[y]=0\qquad(\delta I\cdots\text{第1変分})$$

$$\delta I=\int_{x_0}^{x_1}\{F(x,y+\delta y,y'+(\delta y)')-F(x,y,y')\}\,dx$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\Big\{\delta y\frac{\partial F}{\partial y}+\underbrace{(\delta y)'\frac{\partial F}{\partial y'}}_{\text{部分積分}}\Big\}\,dx$$

$$=\underbrace{\left[\delta y\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x_0}^{x_1}}_{0\ (\because\ \delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0)}+\int_{x_0}^{x_1}\delta y\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}dx,$$

$$\therefore\ \int_{x_0}^{x_1}\delta y\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}dx=0\quad\text{for }{}^\forall\delta y(x)\ \text{s.t.}\ \delta y(x_0)=\delta y(x_1)=0.$$

$$\therefore\ \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0.\qquad\cdots\text{Euler-Lagrange 方程式}$$

＊ 物理学における変分問題では "$\delta I=0$" を第一原理としている場合が多い。

例題 (x, y) 平面内の2点 (x_0, y_0), (x_1, y_1) を結ぶ曲線で長さが最小のものを求めよ. □

(解) 曲線を $y = y(x)$ とすると, 題意の問題は積分汎関数

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx, \quad F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

を境界条件 $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ のもとで最小にする変分問題である.
Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

は,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

より,

$$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0, \quad y' = c_1 \ (\mathrm{const}),$$

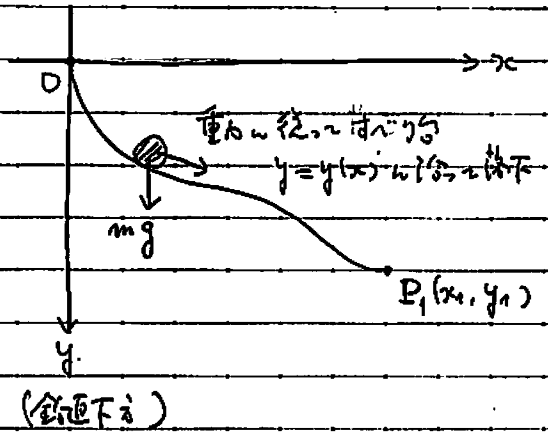
$$\therefore \quad y(x) = c_1 x + c_0 \quad (c_0, c_1 : \mathrm{const.})$$

定数 c_0, c_1 は境界条件 $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ より定める.

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1 x_0 + c_0 = y_0 \\ y(x_1) = c_1 x_1 + c_0 = y_1 \end{cases} \quad \therefore \ c_0 = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}, \quad c_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$y(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}.$$ ☒

最急降下線 (brachistochrone)



端点 O, P_1 を固定したとき、落下時間が最小となるすべり台の曲線 $y=y(x)$ を求めよ。

(解) 力学的エネルギー保存則

$$\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}-mgy=0.$$

(原点 O を速度 0 で出発)

$$dt=\sqrt{\frac{(dx)^2+(dy)^2}{2gy}}=\sqrt{\frac{1+x'^2}{2gy}}\,dy \qquad \left(x'=\frac{dx}{dy}\right)$$

落下時間

$$T[y]=\int_0^{y_1}\sqrt{\frac{1+x'^2}{2gy}}\,dy=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{y_1}F\,dy.$$

Euler-Lagrange eqn. $\dfrac{\partial F}{\partial x}-\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x'}\right)=0,$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial x'}=\frac{x'}{\sqrt{y(1+x'^2)}}.$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{x'}{\sqrt{y(1+x'^2)}}\right\}=0,$$

$$\frac{x'}{\sqrt{y(1+x'^2)}}=c_1$$

$c_1=0$ とすると、$x'\equiv 0$、$x(y)\equiv \text{const}$　$x(0)=0$ より $\text{const}=0$、
$x(y)\equiv 0$ となるが、これは $x_1=x(y_1)>0$ に反する。よって、$c_1\neq 0$

$$\frac{x'}{\sqrt{y(1+x'^2)}}=c_1.$$

$$x'^2 = c_1^2 y(1+x'^2), \qquad x'^2(1-c_1^2 y) = c_1^2 y.$$

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{c_1^2 y}{1-c_1^2 y}} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}} \quad (2a = c_1^{-2}).$$

これを y について積分する.

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{2a-y}}\, dy.$$

置換 $z = \sqrt{\dfrac{y}{2a-y}}$ を行うと,

$$z^2(2a-y) = y, \qquad y(1+z^2) = 2az^2, \qquad y = \frac{2az^2}{1+z^2} = 2a - \frac{2a}{1+z^2}.$$

$$dy = \frac{4az}{(1+z^2)^2}\, dz$$

$$x = \int \frac{4az^2}{(1+z^2)^2}\, dz = -2a \int z \left(\frac{1}{1+z^2}\right)' dz$$

$$= -2a\left\{\frac{z}{1+z^2} - \int \frac{dz}{1+z^2}\right\}$$

$$= -\frac{2az}{1+z^2} + 2a \arctan z.$$

$$\frac{z}{1+z^2} = \frac{\sqrt{\frac{y}{2a-y}}}{1+\frac{y}{2a-y}} = \frac{\sqrt{\frac{y}{2a-y}}}{\frac{2a}{2a-y}} = \frac{1}{2a}\sqrt{y(2a-y)}.$$

$\theta = \arctan z \ (\Leftrightarrow z = \tan\theta)$ とおくと,

$$y = \frac{2a\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = 2a\cos^2\theta\tan^2\theta = 2a\sin^2\theta = a(1-\cos 2\theta).$$

$$\frac{2az}{1+z^2} = \frac{2a\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = 2a\cos^2\theta\tan\theta = 2a\sin\theta\cos\theta = a\sin 2\theta$$

$$x = 2a\theta - a\sin 2\theta = a(2\theta - \sin 2\theta).$$

$$\therefore \begin{cases} x = a(2\theta - \sin 2\theta) \\ y = a(1-\cos 2\theta) \end{cases}$$ サイクロイド (cycloid)