1.3 Euler-Lagrange 方程式の第一積分

積分汎関数 $\displaystyle F[y] = \int_{x_0}^{x_1} \underbrace{F(y, y')}_{\text{独立変数 } x \text{ を陽に含まない}} dx$

(explicitly)

この場合，Euler-Lagrange 方程式の解 $y(x)$ に対して

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$$

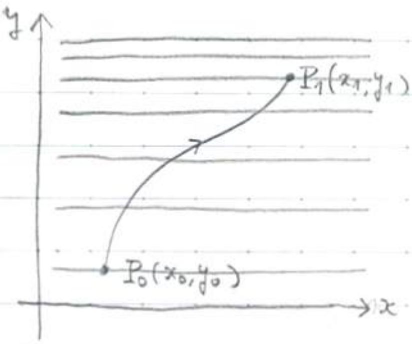
が成り立つ．（左辺の量…第一積分）

$$\because\ \frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{dF}{dx} - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

$$= y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)$$

$$= y'\underbrace{\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right\}}_{0\ (\because\ \text{E-L方程式})} = 0.$$

(光学) Fermatの原理 ～ Snellの法則



屈折率 $n = n(y)$
→ 光速 $c/n(y)$

<Fermatの原理>
光は到達時間が最小となるような経路を進む

経路 $y = y(x)$
到達時間

$$\int \frac{ds}{c/n} = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x_1} n(y)\sqrt{1+y'^2}\,dx \equiv \frac{1}{c} I[y].$$

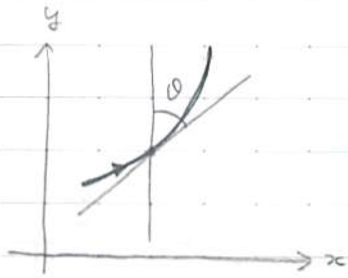
$F = n(y)\sqrt{1+y'^2}$ は x を陽に含まないので、

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const}.$$

$$\text{左辺} = n(y)\sqrt{1+y'^2} - y' \cdot n(y)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{n(y)}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const}$$

$\therefore$ $n\sin\theta = \text{const}.$

… Snellの法則



//

最速降下線の問題を第1積分を用いて解く。

エネルギー保存則 $\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}-mgy=0$.

$$dt=\sqrt{\frac{(dx)^2+(dy)^2}{2gy}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

落下時間 $I[y]=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx\equiv\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{x_1}F(y,y')\,dx$

Fはxを陽に含まないので、

$$F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=\mathrm{const.}$$

左辺 $=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}-y'\frac{y'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}}=\mathrm{const.}$

$$y(1+y'^2)=c\ (\mathrm{const.}).$$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{c}{y}-1},\qquad x=\int\sqrt{\frac{y}{c-y}}\,dy.$$

$y=c\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{c}{2}(1-\cos\theta)$ と変数変換すると、

$$\sqrt{\frac{y}{c-y}}=\tan\frac{\theta}{2},\qquad dy=c\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$x=c\int\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta=\frac{c}{2}\int(1-\cos\theta)\,d\theta=\frac{c}{2}(\theta-\sin\theta),$$

$$\therefore\ \begin{cases}x=\frac{c}{2}(\theta-\sin\theta)\\ y=\frac{c}{2}(1-\cos\theta)\end{cases}\quad\cdots\text{サイクロイド}$$

(光学) Fermatの原理〜Snellの法則の例題

例題 $n(y) = 1+\alpha y$ ($\alpha > 0$ const.) の場合

Snellの法則より

$$\frac{1+\alpha y}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const.}, \quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = c^2(1+\alpha y)^2 \quad (c>0 \ \text{const})$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{c^2(1+\alpha y)^2-1}} = \pm\int dx,$$

$$\text{左辺} = \frac{1}{c\alpha}\log\left\{c(1+\alpha y)+\sqrt{c^2(1+\alpha y)^2-1}\right\} = (\pm)(x-x_0),$$

$$c(1+\alpha y)+\sqrt{c^2(1+\alpha y)^2-1} = \exp[c\alpha(x-x_0)] \quad \text{―①}$$

①両辺の逆数をとって、

$$\frac{1}{c(1+\alpha y)+\sqrt{c^2(1+\alpha y)^2-1}} = \exp[-c\alpha(x-x_0)].$$

$$\text{左辺} = \frac{c(1+\alpha y)-\sqrt{c^2(1+\alpha y)^2-1}}{c^2(1+\alpha y)^2-[c^2(1+\alpha y)^2-1]} = c(1+\alpha y)-\sqrt{c^2(1+\alpha y)^2-1}$$

より

$$c(1+\alpha y)-\sqrt{c^2(1+\alpha y)^2-1} = \exp[-c\alpha(x-x_0)]. \quad \text{―②}$$

(①+②)÷2 より

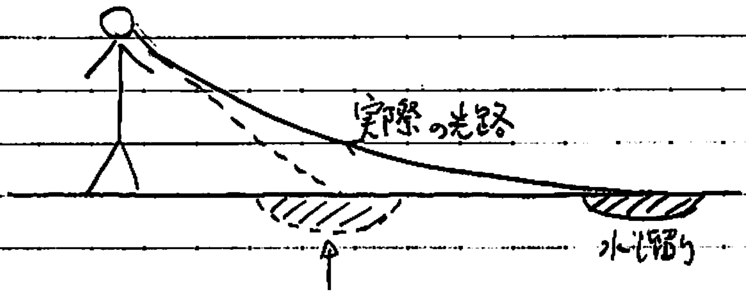
$$c(1+\alpha y) = \cosh[c\alpha(x-x_0)]$$

$$\therefore \ y(x) = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{c}\cosh[c\alpha(x-x_0)]-1\right].$$

定数 c, x_0 … 境界条件より決定する.

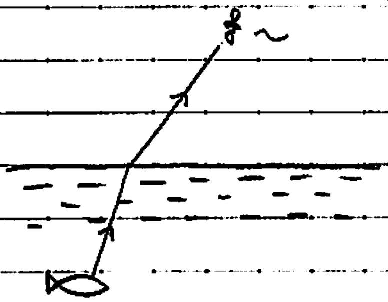
NO. 5

DATE



人間はここに水溜りが
あると勘違いする。 → 逃げ水

（cf. 蜃気楼）



テッポウウオ。
…光の屈折を見込んで
水を飛ばす角度を補正。

1-4 高階導関数を含む場合

$$I[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y',y'')\,dx$$

を境界条件

$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1,\quad y'(x_0)=y_0^{(1)},\quad y'(x_1)=y_1^{(1)}$ ——①

のもとで最小にするような $y(x)$ を求めよ。 □

解：$y(x)$

比較関数：$y_\varepsilon(x)=y(x)+\varepsilon\eta(x)$

$\eta(x)$ は任意関数，ただし

$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0,\quad \eta'(x_0)=\eta'(x_1)=0$

をみたす。

$\tilde{I}(\varepsilon)\equiv I[y_\varepsilon]$ は $\varepsilon=0$ で最小値をとる。

$\longrightarrow\ \tilde{I}'(0)=0$.

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}'(\varepsilon)&=\frac{d}{d\varepsilon}\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_\varepsilon,y'_\varepsilon,y''_\varepsilon)\,dx\\
&=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}F(x,y_\varepsilon,y'_\varepsilon,y''_\varepsilon)\,dx\\
&=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial y_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial y_\varepsilon}+\frac{\partial y'_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial y'_\varepsilon}+\frac{\partial y''_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial y''_\varepsilon}\right)dx\\
&=\int_{x_0}^{x_1}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial y_\varepsilon}+\eta'\frac{\partial F}{\partial y'_\varepsilon}+\eta''\frac{\partial F}{\partial y''_\varepsilon}\right)dx,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{I}'(0)&=\int_{x_0}^{x_1}\Bigg(\eta\frac{\partial F}{\partial y}\underbrace{+\eta'\frac{\partial F}{\partial y'}+\eta''\frac{\partial F}{\partial y''}}_{\text{部分積分}}\Bigg)dx\\
&=\underbrace{\left[\eta\frac{\partial F}{\partial y'}+\eta'\frac{\partial F}{\partial y''}\right]_{x_0}^{x_1}}_{0}+\int_{x_0}^{x_1}\Bigg[\eta\frac{\partial F}{\partial y}-\eta\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\underbrace{-\eta'\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}_{\text{部分積分}}\Bigg]dx
\end{aligned}
$$

(∵境界条件①)

$$
=\underbrace{\left[\eta\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]_{x_0}^{x_1}}_{0}+\int_{x_0}^{x_1}\eta\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]dx
$$

(∵境界条件①)

(1-4)

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) \right] dx = 0$$

for $\forall \eta(x)$ satisfying ①

$$\therefore \quad \boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0}$$

… Euler-Lagrange 方程式

〈もっと高階の導関数を含む場合〉

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})\, dx$$

を境界条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}, \quad y'(x_1) = y_1^{(1)},$$
$$\cdots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}$$

のもとで最小になるような $y(x)$ を求めよ。

$$\Downarrow$$

Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right) = 0,$$

1-5 複数の関数を含む場合

$$I[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',z,z')\,dx$$

を境界条件

$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1,\quad z(x_0)=z_0,\quad z(x_1)=z_1$

のもとで最小にするような $y(x)$, $z(x)$ を求めよ。 □

解：$y(x)$, $z(x)$

比較関数：$y_{\varepsilon_1}(x)=y(x)+\varepsilon_1\eta(x)$,

$z_{\varepsilon_2}(x)=z(x)+\varepsilon_2\zeta(x)$.

$\eta(x)$, $\zeta(x)$ は任意関数，ただし，

$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0,\quad \zeta(x_0)=\zeta(x_1)=0$

をみたす。

$\tilde{I}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=I[y_{\varepsilon_1},z_{\varepsilon_2}]$ は $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ で最小となる。

$$\Longrightarrow \left.\frac{\partial\tilde{I}}{\partial\varepsilon_1}\right|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}=\left.\frac{\partial\tilde{I}}{\partial\varepsilon_2}\right|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=0}=0$$

この後の議論は今までと同様。

↓

Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0,\quad \frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)=0.$$