（応用解析学特論）微積分・常微分方程式の復習

常微分方程式

次のふたつができればOK

1. 変数分離形
2. 定数係数線形常微分方程式

〈1. 変数分離形〉

$$\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$$

$$\downarrow$$

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\,dt$$

両辺の不定積分を計算して解を得る。

例 $\dfrac{dx}{dt} = ax$ （a: const.）

$$\int \frac{dx}{x} = a\int dt$$

左辺 $= \log|x| + \text{const.}$，右辺 $= at + \text{const.}$

$\log|x| = at + c$ （c: const.）．

$x(t) = Ce^{at}$ （$C = \pm e^{c}$）． ―― ①

$x(t) \equiv 0$ も解である（①で $C=0$ とおいた場合に相当）．

$\therefore$ $x(t) = Ce^{at}$ （C: 任意定数）． ⊠

〈2. 定数係数線形常微分方程式〉

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_2 x = 0.$$

解を $x(t) = e^{\lambda t}$ とおいて代入すると，$(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)e^{\lambda t} = 0$

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$，解 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$

一般解： $\lambda_1 \neq \lambda_2$ の場合 $x(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$，

$\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda)$ の場合 $x(t) = C_1e^{\lambda t} + C_2te^{\lambda t}$

（C_1, C_2: 任意定数）．

日本総研
The Japan Research Institute, Limited

（微積分・常微分方程式の復習）

Euler の公式　$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

例　$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$　（$\omega > 0$ const.）単振動の運動方程式

$x(t) = e^{\lambda t}$ とおいて代入すると、$\lambda^2 + \omega^2 = 0$、$\lambda = \pm i\omega$.

一般解　$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$　（C_1, C_2：任意定数）.

Euler の公式より

$$x(t) = C_1(\cos\omega t + i\sin\omega t) + C_2(\cos\omega t - i\sin\omega t)$$
$$= (C_1 + C_2)\cos\omega t + i(C_1 - C_2)\sin\omega t .$$

$C_1 + C_2$, $i(C_1 - C_2)$ をそれぞれ改めて C_1, C_2 と書いて、

一般解　$x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$　（C_1, C_2：任意定数）.　⊠

微積分の知識でこの後必要になるもの

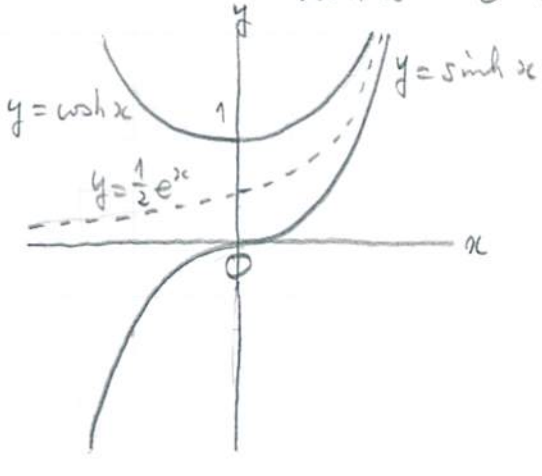
〈双曲線関数〉

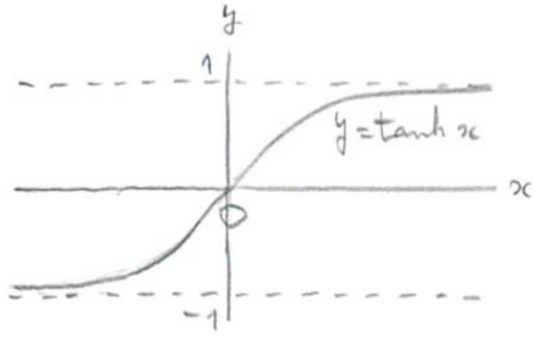
$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$　…hyperbolic sine（ハイパボリック サイン）とよむ

$\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,

$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\cosh x$ は偶関数
$\sinh x$, $\tanh x$ は奇関数





(微積分・常微分方程式の復習)

双曲線関数の諸公式

$(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$.

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

〈知っておくとよい不定積分〉 積分定数は省略

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underbrace{\arcsin x}_{(\sin x\text{ の逆関数})}, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \log(x+\sqrt{x^2+c}) \quad (c : \text{const.})$$

* 単振動の運動方程式の別解

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

両辺に $\dfrac{dx}{dt}$ を掛けて積分する： $\dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{dx}{dt} + \omega^2 x \dfrac{dx}{dt} = 0$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}C \quad (C \geq 0 : \text{const.})$$

← エネルギー保存則

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{C-\omega^2 x^2}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{C-\omega^2x^2}} = \pm dt, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{C-\omega^2x^2}} = \pm\int dt.$$

左辺 $= \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int \frac{d(\omega x/\sqrt{C})}{\sqrt{1-(\omega x/\sqrt{C})^2}} = \dfrac{1}{\omega}\arcsin\left(\dfrac{\omega x}{\sqrt{C}}\right) + \text{const.}$

より

$$\frac{1}{\omega}\arcsin\left(\frac{\omega x}{\sqrt{C}}\right) = \pm(t-t_0) \quad (t_0 : \text{const.})$$

$\therefore\quad x(t) = C\sin\omega(t-t_0)$, C, t_0 : 任意定数

(* $\pm\dfrac{\sqrt{C}}{\omega}$ を改めて C と書いた.)