応用解析学特論

第2章 解析力学

NO. 1
DATE 2019.

2.1 仮想仕事の原理；d'Alembertの原理

N質点系

各質点の位置 $\mathbf{r}_i$，質量 m_i $(i=1, 2, \cdots, N)$

各質点にはたらく（束縛力でない）力 $\mathbf{F}_i$ $(i=1, 2, \cdots, N)$

束縛力 $\mathbf{S}_i$

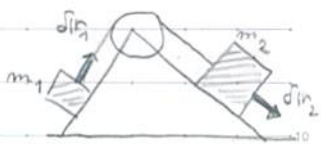
（垂直抗力 etc.）

質点系がつり合い状態にあるとき，

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{S}_i = 0 \quad (i=1, \cdots, N)$$

$\delta\mathbf{r}_i$ $(i=1, \cdots, N)$：束縛条件下で許される各質点の微小変位

… <u>仮想変位</u>（virtual displacement）



$$\sum_{i=1}^{N} (\mathbf{F}_i + \mathbf{S}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0.$$

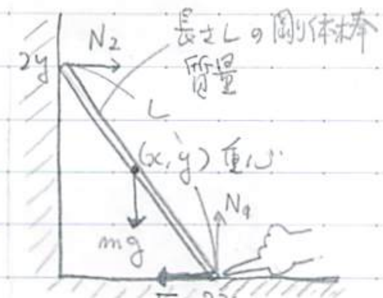
束縛力 ⊥ 仮想変位（$\mathbf{S}_i \perp \delta\mathbf{r}_i$）より $\mathbf{S}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0$ であるから，

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i = 0$$

<u>仮想仕事の原理</u>

質点系がつり合い状態にあるとき，微小の仮想変位に対して系に加えられた（束縛力を除く）力のなす仕事の総和はゼロである．

例



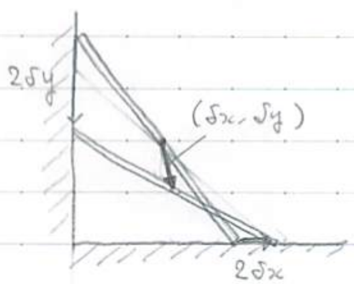
棒が静止するためには，どれだけの力Fを下端に加える必要があるか？

（解）下左図の仮想変位を考える．棒になされた仮想変位は

$$-2F\delta x - mg\delta y = 0$$

（$\delta y < 0$ に注意）．

$(2x)^2 + (2y)^2 = L^2$ より $x\delta x + y\delta y = 0$ であるから，



$$-2F\delta x + mg\frac{x}{y}\delta x = \left(-2F + mg\frac{x}{y}\right)\delta x = 0.$$

$$\therefore\quad F = \frac{mgx}{2y}.$$

（垂直抗力 N_1, N_2 は考えなくてもよい）

KOKUYO

(2.1)

質点系が運動しているとき、

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i + \mathbf{S}_i \quad (i=1,\cdots,N)$$ …Newtonの運動方程式

$\delta \mathbf{r}_i$: 微小な仮想変位 $(i=1,\cdots,N)$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N} \Big(\mathbf{F}_i \underbrace{- m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2}}_{\text{慣性力 (force of inertia)}} \Big) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \qquad \text{—— ①}$$

d'Alembertの原理
質点系が運動しているとき、微小な仮想変位に対し、系に加えられた力と慣性力のする仕事の総和はゼロである。 □

<一般座標、一般化力>

束縛条件下の質点系の変位

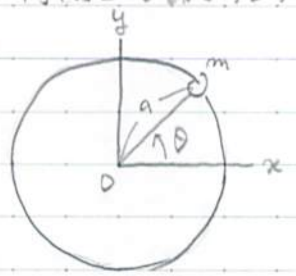
… f個の独立なパラメータ $q_1, \cdots, q_f$ で記述できるとする。

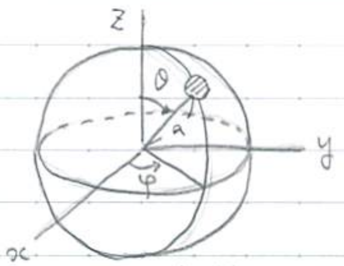
$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \cdots, q_f ; t) \quad (i=1,\cdots,N)$$

f : 系の自由度

$q_1, \cdots, q_f$: 系の一般座標

例　円周上を動くリング　　　球面上を動く質点





$f=1$, 一般座標 θ
$(x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta)$

$f=2$, 一般座標 θ, φ
$(x = a\sin\theta\cos\varphi,\ y = a\sin\theta\sin\varphi,\ z = a\cos\theta)$ □

①を一般座標を用いて書き直す。

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \quad (i=1,\cdots,N)$$

(2.1)

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}\cdot\delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{f} m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\,\delta q_\alpha$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{f} m_i\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) - \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\right\}\delta q_\alpha .$$

ここで、

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{f}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha},\quad T = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\dot{\mathbf{r}}_i^2 \text{ を作る.}}$$

より、

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha} = \frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha},$$

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_{\beta=1}^{f}\frac{\partial^2\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial^2\mathbf{r}_i}{\partial t\,\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)$$

であるから、

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2}\cdot\delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{f} m_i\left\{\frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}\right) - \dot{\mathbf{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha}\right\}\delta q_\alpha$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{f}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right\}\delta q_\alpha ,$$

where

$$T = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\dot{\mathbf{r}}_i^{\,2} \quad \cdots \text{運動エネルギー}$$

$$\left(* \quad \dot{\mathbf{r}}_i^{\,2} = \dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i \right)$$

一方、

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{f}\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{f}\mathcal{F}_\alpha\,\delta q_\alpha ,$$

$$\mathcal{F}_\alpha \equiv \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\quad(\alpha = 1,\cdots,f)\quad\cdots\ \underline{\text{一般化力}}$$

以上より、① は

$$\sum_{\alpha=1}^{f}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \mathcal{F}_\alpha\right\}\delta q_\alpha = 0$$

となる。これが、任意の独立な $\delta q_1, \cdots, \delta q_f$ に対して成り立つので、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = \mathcal{F}_\alpha \quad (\alpha = 1,\cdots,f).$$

(2.1)

とくに $\mathbb{F}_i$ が保存力である場合：

$$\mathbb{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbb{r}_i} \left(\equiv -\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i} \right) \right),$$

（＊ベクトルでの微分 物理でよく用いられる記法）

$$U = U(\mathbb{r}_1, \cdots, \mathbb{r}_N, t)$$ …ポテンシャル

$$F_\alpha = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial \mathbb{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbb{r}_i}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, \cdots, f).$$

よって，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \quad (\alpha = 1, \cdots, f).$$

$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$ に注意すれば，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, f),$$

where

$L \equiv T - U =$（運動エネルギー）−（ポテンシャル） … Lagrangian（ラグランジアン）

…… Lagrange の運動方程式

2.2 Hamiltonの原理

Lagrange運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \quad (\alpha=1,\cdots,f)$$

…次の変分問題に対するEuler-Lagrange方程式である：

作用 $S[q]=S[q_1,\cdots,q_f]$

$$=\int_{t_0}^{t_1} L(t,q,\dot{q})\,dt=\int_{t_0}^{t_1} L(t;q_1,\cdots,q_f;\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_f)\,dt$$

を境界条件

$$q_\alpha(t_0)=q_\alpha^{(0)},\quad q_\alpha(t_1)=q_\alpha^{(1)} \quad (\alpha=1,\cdots,f)$$

のもとで最小にするような $q_\alpha(t)$ $(\alpha=1,\cdots,f)$ を求めよ. □

Hamiltonの原理

質点系の実際の軌道 $q_\alpha(t)$ $(\alpha=1,\cdots,f)$ は，時間両端 $t=t_0, t_1$ の位置が指定されているという条件のもとで，作用 $S[q]=S[q_1,\cdots,q_f]$ が停留になるような $q_\alpha(t)$ $(\alpha=1,\cdots,f)$ として与えられる. □

…力学の第1原理

例 1質点系, Cartesian座標

$$L=T-U=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-U(x,y,z,t).$$

Lagrange運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0,\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0.$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x},\quad \frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial x}$ より $m\ddot{x}=-\frac{\partial U}{\partial x}$.

y, z についても同様. ゆえに, Lagrange運動方程式は次のようになる.

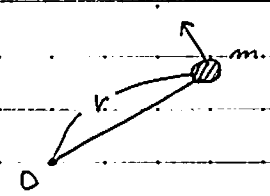
$$m\ddot{x}=-\frac{\partial U}{\partial x},\quad m\ddot{y}=-\frac{\partial U}{\partial y},\quad m\ddot{z}=-\frac{\partial U}{\partial z}.$$

…従来のNewton運動方程式に他ならない.

(2.2)

例 中心力を受けて2次元運動する1質点系

一般座標：極座標 (r, θ)



Lagrangian:

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U(r;t).$$

運動エネルギー T を極座標 r, θ で書き直す.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta.$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$\therefore \quad L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r,t).$$

Lagrange運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r},$$

$$\therefore \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}), \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0.$$

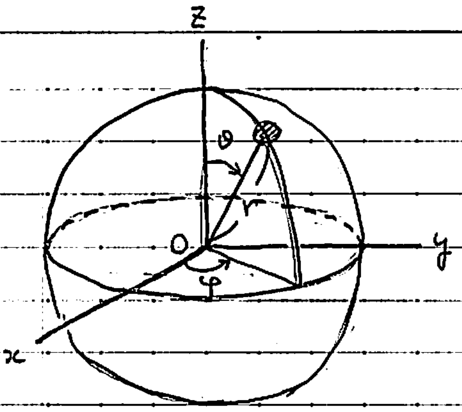
ゆえに、次の運動方程式を得る:

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - \dfrac{\partial U}{\partial r} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0. \longrightarrow \quad mr^2\dot{\theta} = \mathrm{const}. \end{cases}$$

…角運動量保存則

(2.2)

例 中心力を受けて3次元運動する1質点系
一般座標：球座標 (r, θ, φ)



Lagrangian

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(r, t)$$

運動エネルギー T を球座標で表す

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

$$\dot{x} = \dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\theta\sin\varphi$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\varphi$$

$$\dot{z} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - U(r, t)$$

Lagrange 運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\dot{\varphi}^2\sin^2\theta - \frac{\partial U}{\partial r}$$

$$\therefore \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}), \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mr^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) + mr^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}\sin\theta; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}\sin\theta), \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}\sin\theta) = 0 \quad \rightarrow \quad \underbrace{mr^2\dot{\varphi}\sin\theta = \text{const}}_{\text{角運動量の}z\text{成分}}$$

エネルギー保存則

Lagrangian L が時刻 t を陽に含まない場合，エネルギーが保存される．

この場合，第1章の議論より

$$(\text{第1積分}) = \sum_{\alpha=1}^{f} \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L = \text{const.}$$

$$U = U(q) = U(q_1, \cdots, q_f),$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q) = \mathbf{r}(q_1, \cdots, q_f),$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \sum_{\alpha=1}^{f} \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha,$$

$$\therefore\ T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{f} a_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \quad \left(a_{\alpha\beta}(q) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \right).$$

$\therefore$ T は $\dot{q}_\alpha$ $(\alpha = 1, \cdots, f)$ の斉次2次式である．

$$\Downarrow$$

$$\sum_{\alpha=1}^{f} \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} = 2T.$$

* $f(x_1, \cdots, x_m)$ は x_i $(i = 1, \cdots, m)$ の斉次 m 次式である．

$$\overset{\text{d}}{\Longleftrightarrow}\ f(cx_1, \cdots, cx_m) = c^m f(x_1, \cdots, x_m) \quad \text{for } \forall c\ (\text{const.}) \quad \text{—— ①}$$

この場合，① の両辺を c で微分すると，

$$\sum_{i=1}^{m} x_i f_{x_i}(cx_1, \cdots, cx_m) = m c^{m-1} f(x_1, \cdots, x_m)$$

$$\left(f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \right),$$

$c = 1$ とおいて，

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = m f. \qquad \square$$

したがって，

$$\sum_{\alpha=1}^{f} \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L = \sum_{\alpha=1}^{f} \dot{q}_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - (T - U) = 2T - (T - U) = T + U,$$

$$\therefore\ T + U = \text{const.} \qquad \cdots \text{エネルギー保存則}.$$