連立一次方程式の数値解法 1

LU分解

連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

or

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \left[A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right]$$

Gaussの消去法 $\left(A_1 = (a_{ij}^{(1)}) = A,\ \boldsymbol{b}_1 = (b_i^{(1)}) = \boldsymbol{b} \right)$

$k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対し
- $i = k+1, \cdots, n$ に対し
  - $m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$;
  - $j = k+1, \cdots, n$ に対し
    - $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}$;
  - $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)}$

* $a_{kk}^{(k)} \neq 0 \ (k = 1, 2, \cdots, n-1)$ と仮定する。

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

後退代入により解を求める。

行列 A に対する操作のみに着目する。

$k = 1, 2, \cdots, n-1$ に対し

$$
\left[\;
\begin{aligned}
&M_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -m_{k+1\,k} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & \underset{k}{-m_{nk}} & & & 1 \end{bmatrix} ; \\
&A_{k+1} = M_k A_k ;
\end{aligned}
\right.
$$

$$M_k = I - e_k m_k ,$$

$$e_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (k , \quad m_k = \left.\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{k+1\,k} \\ \vdots \\ m_{nk} \end{bmatrix}\right\} k 個$$

$$
\left(
\begin{aligned}
&(I - m_k e_k^T)^{-1} = I + m_k e_k^T \\
&\because (I - m_k e_k^T)(I + m_k e_k^T) \\
&= I + m_k \underbrace{(e_k^T m_k)}_{0} e_k^T \\
&= I . \qquad \boxtimes
\end{aligned}
\right)
$$

と書けるから、

$$A_{k+1} = (I - m_k e_k^T) A_k ,$$

$$A_k = (I - m_k e_k^T)^{-1} A_{k+1} = (I + m_k e_k^T) A_{k+1}$$

$$
\begin{aligned}
A = A_1 &= (I + m_1 e_1^T) A_2 \\
&= (I + m_1 e_1^T)(I + m_2 e_2^T) A_3 \\
&= \cdots \\
&= (I + m_1 e_1^T) \cdots (I + m_{n-1} e_{n-1}^T) A_n \\
&= (I + m_1 e_1^T + m_2 e_2^T \cdots + m_{n-1} e_{n-1}^T) A_n
\end{aligned}
$$

($e_1^T m_2 = 0$ などを使う)

$$
= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ m_{21} & 1 & & & \\ m_{31} & m_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{n-1\,n-1} & 1 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{下三角行列} \\ \text{(lower triangular matrix)}}}
\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{上三角行列} \\ \text{(upper triangular matrix)}}}
$$

行列 A の LU分解

$$A = LU, \quad L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \bigcirc \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & \bigcirc & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

下三角行列　　　上三角行列

<連立一次方程式の解法>

$$\underbrace{A}_{LU} x = b \longrightarrow \begin{cases} Ly = b & \text{―― ①} \\ Ux = y & \text{―― ②} \end{cases}$$

① $$\begin{bmatrix} l_{11} & & \bigcirc \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ → 前進代入で解く

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right)$$

$(i = 1, 2, \cdots, n)$.

② $$\begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$ → 後退代入で解く

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right)$$

$(i = n, n-1, \cdots, 1)$.

* ほんとうは

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}, \quad y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right) \quad (i = 2, \cdots, n)$$

だけど、プログラムは

```
for(i=1; i<=n; ++i){
    yi = bi;
    for(j=1; j<=i-1; ++j)
        yi =- lij * yj;
    yi = yi/lii;
}
```

と書いてしまってよい（i=1 のとき、for(j=1; …) の部分は実行されない）。

部分枢軸選択付きLU分解

LU分解 … 途中で $a_{kk}^{(k)}=0$ となったら計算できなくなる

$a_{kk}^{(k)}\approx 0$ となったら精度が悪くなる.

↓

[各k段目で $|a_{Ik}^{(k)}| = \max_{k\le i\le n}|a_{ik}^{(k)}|$ なる添字 $I(=I_k)$ を見つけ

第k行と第I行を入れ換える]

… (部分)枢軸選択 (partial pivoting)

((k,k) … 枢軸, $a_{kk}^{(k)}$ … 枢軸要素)

$$\tilde{A}_1 = (\tilde{a}_{ij}^{(1)}) = P_1 A_1, \quad P_1 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & & \\ \vdots & 1 & & & \\ 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \ \ 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (1 \\ \\ (I_1 \\ \\ \\ \end{array} \quad \left(|a_{I_1 1}| = \max_{1\le i\le n} |a_{i1}| \right)$$

$$m_{i1} = \frac{\tilde{a}_{i1}^{(1)}}{\tilde{a}_{11}^{(1)}} \quad (i=2,\cdots,n),$$

$$a_{ij}^{(2)} = \tilde{a}_{ij}^{(1)} - m_{i1}\tilde{a}_{1j}^{(1)} \quad (i,j=2,\cdots,n),$$

$$A_2 = (a_{ij}^{(2)}) = (I - m_1 e_1^T) P_1 A_1 \quad \left(m_1 = [0, m_{21}, \cdots, m_{n1}]^T \right),$$

$$\tilde{A}_2 = (\tilde{a}_{ij}^{(2)}) = P_2 A_2, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & \cdots & 1 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & \ddots \ \ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (2 \\ \\ (I_2 \\ \\ \end{array} \left(|a_{I_2 2}^{(2)}| = \max_{2\le i\le n} |a_{i2}^{(2)}| \right).$$

$$\tilde{m}_{i2} = \frac{\tilde{a}_{i2}^{(2)}}{\tilde{a}_{22}^{(2)}} \quad (i=3,\cdots,n),$$

$$\tilde{a}_{ij}^{(3)} = \tilde{a}_{ij}^{(2)} - m_{i2}\tilde{a}_{2j}^{(2)} \quad (i,j=3,\cdots,n),$$

$$A_3 = (a_{ij}^{(3)}) = (I - m_2 e_2^T) P_2 A_2 \quad \left(m_2 = [0, 0, m_{32}, \cdots, m_{n2}]^T \right).$$

……

$$A_n = (I - m_{n-1} e_{n-1}^T) P_{n-1} (I - m_{n-2} e_{n-2}^T) P_{n-2} \cdots$$

(上三角行列) $\cdots P_3 (I - m_2 e_2^T) P_2 (I - m_1 e_1^T) P_1 A$

$$= (I - m_{n-1} e_{n-1}^T) P_{n-1} \cdots P_3 (I - m_2 e_2^T)(I - P_2 m_1 e_1^T) P_2 P_1 A$$

[$e_1^T P_2 = \cancel{e_2^T}\ e_1^T$ に注意]

$$= (I - m_{n-1} e_{n-1}^T) P_{n-1} \cdots (I - P_3 m_2 e_2^T)(I - P_3 P_2 m_1 e_1^T) P_3 P_2 P_1 A$$

$$\cdots\cdots$$

$$= (I - \tilde{m}_{n-1} e_{n-1}^T) \cdots (I - \tilde{m}_2 e_2^T)(I - \tilde{m}_1 e_1^T) P A,$$

where

$\tilde{m}_1 = P_{n-1} \cdots P_3 P_2 m_1$, $\tilde{m}_2 = P_{n-1} \cdots P_4 P_3 m_2$, $\cdots$, $\tilde{m}_{n-2} = P_{n-1} m_{n-2}$,

$\tilde{m}_{n-1} = m_{n-1}$, $\quad P = P_{n-1} \cdots P_2 P_1$.

$$PA = (I - \tilde{m}_1 e_1^T)^{-1} (I - \tilde{m}_2 e_2^T)^{-1} \cdots (I - \tilde{m}_{n-1} e_{n-1}^T)^{-1} A_n$$

$$= (I + \tilde{m}_1 e_1^T)(I + \tilde{m}_2 e_2^T) \cdots (I + \tilde{m}_{n-1} e_{n-1}^T) A_n$$

$$= (I + \tilde{m}_1 e_1^T + \tilde{m}_2 e_2^T + \cdots + \tilde{m}_{n-1} e_{n-1}^T) A_n$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \tilde{m}_{21} & 1 & & \\ \tilde{m}_{31} & \tilde{m}_{32} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ \tilde{m}_{n1} & \tilde{m}_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ A_n \\ (\text{上三角行列}) \\ \\ \end{bmatrix}.$$

$\therefore \quad PA = LU$ 　　部分枢軸選択付きLU分解

$P = P_{n-1} \cdots P_1$ 　置換行列

$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$ 下三角行列, $\quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{nn} \end{bmatrix}$ 上三角行列.

＜連立一次方程式の解＞

$$Ax = b \iff \begin{cases} Ly = Pb & \longrightarrow \text{前進代入で解く} \\ Ux = y & \longrightarrow \text{後退代入で解く} \end{cases}$$

〈部分枢軸選択付きLU分解による連立一次方程式の解法〉

行の入れ換えの記録 → <u>インデックスベクトル</u> $\mathbb{p} = [p(1), \cdots, p(n)]^T$ を使う.

最初 $\mathbb{p} = [1, 2, \cdots, n]^T$.

各k段目で $(p(k), p(I)) := (p(I), p(k))$ （入れ換え）.

〜算法〜

$$
\left.
\begin{array}{l}
\mathbb{p} = [1, 2, \cdots, n]^T ; \\
k = 1, 2, \cdots, n-1 \text{ に対し} \\
\left[
\begin{array}{l}
|a^{(k)}_{p(I)k}| = \max\limits_{k \leq i \leq n} |a^{(k)}_{p(i)k}| \text{ なる添字 } I \text{ を見つける;} \\
(p(k), p(I)) := (p(I), p(k)); \\
i = k+1, \cdots, n \text{ に対し} \\
\left[
\begin{array}{l}
m_{p(k)i} = a^{(k)}_{p(i)k} / a^{(k)}_{p(k)k}; \\
j = k+1, \cdots, n \text{ に対し} \\
\left[\; a^{(k+1)}_{p(i)j} = a^{(k)}_{p(i)j} - m_{p(i)k}\, a_{p(k)j}; \right.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right\} \text{LU分解}
$$

$$
\left(\text{これで，} PA = LU, \; L = \begin{bmatrix} 1 & & \bigcirc \\ m_{p(2)1} & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ m_{p(n)1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} a^{(1)}_{p(1)1} & \cdots & a^{(1)}_{p(1)n} \\ & \ddots & \vdots \\ \bigcirc & & a^{(n)}_{p(n)n} \end{bmatrix} \text{ を得る.} \right)
$$

$$
\begin{array}{l}
i = 1, 2, \cdots, n \text{ に対し} \\
\left[\quad y_i = b_{p(i)} - \sum\limits_{j=1}^{i-1} m_{p(i)j}\, y_j ; \right.
\end{array}
\qquad \cdots \; L\mathbb{y} = P\mathbb{b} \text{ を解く}
$$

$$
\begin{array}{l}
i = n, n-1, \cdots, 1 \text{ に対し} \\
\left[\quad x_i = \dfrac{1}{a^{(i)}_{p(i)i}} \left(y_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} m_{p(i)j}\, x_j \right) ; \right.
\end{array}
\qquad \cdots \; U\mathbb{x} = \mathbb{y} \text{ を解く}
$$

行列ノルムと条件数の推定

ベクトル $x = [x_1, \cdots, x_m]^T$ の ノルム

$$\|x\|_p \equiv \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty \equiv \max_{1 \le i \le m} |x_i| .$$

$p = 2$ … Euclid ノルム

$p = 1, \infty$ の場合をよく使う.

行列 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$ の ノルム

$$\|A\|_p \equiv \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_p .$$

命題 (1) $\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$,

(2) $\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$. □

∵ (1) $\|x\|_\infty = 1$ なる x に対し

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max_{1 \le i \le m} \left| \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right| \\ &\le \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| |x_j| \\ &\le \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \quad (\because |x_j| \le \|x\|_\infty = 1) . \end{aligned}$$

よって, 右辺を attain する x ($\|x\|_\infty = 1$) を見つければよい.

$\sum_{j=1}^m |a_{Ij}| = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$ なる添字 I をとり,

$$x_j = \mathrm{sgn}\, a_{Ij} = \begin{cases} +1 & (a_{Ij} > 0) \\ 0 & (a_{Ij} = 0) \\ -1 & (a_{Ij} < 0) \end{cases} \quad (j = 1, \cdots, m)$$

とおくと, $\|x\|_\infty = 1$ であり,

$$\left| Ax \text{ の第} I \text{行成分} \right| = \left| \sum_{j=1}^{m} a_{Ij} x_j \right| = \sum_{j=1}^{m} |a_{Ij}|$$

$\|Ax\|_\infty \geq$ 左辺 により $\|Ax\|_\infty \geq \sum_{j=1}^{m} |a_{Ij}|$

$$\therefore \|Ax\|_\infty = \sum_{j=1}^{m} |a_{Ij}| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$$ となり OK.

(2) $\|x\|_1 = 1$ なる x に対し

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \right\} |x_j| .$$

$\sum_{i=1}^{m} |a_{iJ}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ なる添字 J をとれば.

$$\|Ax\|_1 \leq \left\{ \sum_{i=1}^{m} |a_{iJ}| \right\} \underbrace{\left\{ \sum_{j=1}^{m} |x_j| \right\}}_{\|x\|_1 = 1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| .$$

よって, 右辺を attain する x ($\|x\|_1 = 1$) を見つければよい.

$$x_j = \begin{cases} 1 & (j = J) \\ 0 & (j \neq J) \end{cases}$$

とおくと, $\|x\|_1 = 1$ であり,

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right| = \sum_{i=1}^{m} |a_{iJ}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

となるので, OK.

$\boxtimes$

日本総研
The Japan Research Institute, Limited

〈行列の条件数 (condition number)〉

$$\kappa_p(A) \equiv \|A\|_p \|A^{-1}\|_p .$$

命題
$$\begin{cases} x : & Ax = b \text{ の解} \\ x+\Delta x : & (A+\Delta A)(x+\Delta x) = b+\Delta b \text{ の解} \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\|\Delta x\|_p}{\|x\|_p} \le \frac{\kappa_p(A)}{1-\kappa_p(A)\|\Delta A\|_p/\|A\|_p}\left(\frac{\|\Delta A\|_p}{\|A\|_p}+\frac{\|\Delta b\|_p}{\|b\|_p}\right). \qquad \square$$

$$\underbrace{\frac{\|\Delta x\|_p}{\|x\|_p}}_{\text{出力の相対誤差}} \lesssim \kappa_p(A)\underbrace{\left(\frac{\|\Delta A\|_p}{\|A\|_p}+\frac{\|\Delta b\|_p}{\|b\|_p}\right)}_{\text{入力の相対誤差}}.$$

条件数 $\kappa_p(A)$ が大きすぎると, A, b の成分の誤差が小さくても, 解 x の誤差は大きくなりうる.

$$\because \begin{cases} (A+\Delta A)(x+\Delta x) = b+\Delta b \\ Ax = b. \end{cases}$$

$$A\Delta x = \Delta b - \Delta A(x+\Delta x),$$
$$\Delta x = A^{-1}\Delta b - A^{-1}\Delta A(x+\Delta x)$$
$$= A^{-1}(\Delta b - (\Delta A)x) - A^{-1}(\Delta A)\Delta x$$
$$\|\Delta x\| \le \|A^{-1}\|(\|\Delta b\| + \|\Delta A\|\|x\|) + \|A^{-1}\|\|\Delta A\|\|\Delta x\|,$$
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\|(\|\Delta b\| + \|\Delta A\|\|x\|)}{1-\|A^{-1}\|\|\Delta A\|\|x\|}$$
$$= \frac{\kappa(A)\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|A\|}\frac{1}{\|x\|}+\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right)}{1-\kappa(A)\|\Delta A\|/\|A\|}$$
$\left(\|b\| = \|Ax\| \le \|A\|\|x\| \text{ より } \|x\|^{-1} \le \|A\|\|b\|^{-1} \text{ なので}\right)$
$$\le \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\|\Delta A\|/\|A\|}\left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}+\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}\right).$$

＜条件数の推定法＞

（名取亮・塚本敦子：行列の条件数の推定，
京都大学数理解析研究所講究録 483 (1983) 212－222．）

行列 A の条件数 $\kappa_1(A)$ を推定したい．

$$\kappa_1(A) = \underbrace{\|A\|_1}_{\text{計算できる}} \underbrace{\|A^{-1}\|_1}_{\text{これを求めるのが大問題}}$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \|(A^{-1})^T\|_\infty = \|(A^T)^{-1}\|_\infty .$$

$$\|(A^T)^{-1}\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|(A^T)^{-1}x\|_\infty$$

右辺を attain する x は $[\pm 1, \pm 1, \cdots, \pm 1]$ の形だった．

$y = (A^T)^{-1}x$ とおくと，$A^T y = x$．

∴ $\|y\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |y_i|$ がなるべく大きくなるように，

$x = [\pm 1, \cdots, \pm 1]$ の各成分の符号を決めればよい．

A の枢軸選択付きLU分解： $PA = LU$．

$\tilde{y} = P^T y$ とおくと，$\|\tilde{y}\|_\infty = \|y\|_\infty$ であり，

$$U^T L^T \tilde{y} = x .$$

枢軸選択付きLU分解のやり方から $|l_{ij}| \le 1$ であるので，
$\|\tilde{y}\|_\infty$ と $\|L^T \tilde{y}\|_\infty$ との違いはそんなに大きくない．

↓

（$\|y\|_\infty$ の代わりに） $U^T z = x$ の解 z について，$\|z\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |z_i|$ が
（$z = L^T \tilde{y}$）
なるべく大きくなるよう，$x = [\pm 1, \cdots, \pm 1]^T$ の各成分の符号を
定めればよい．

$U^T z = x$ の解

$$z_i = \frac{1}{u_{ii}}\left(x_i - \sum_{j=1}^{i-1} u_{ji} z_j\right) \quad (i=1,\cdots,n).$$

1) $x_1 = +1$ とおく. $z_1 = \frac{1}{u_{11}}$.

2) 各 $i=2,\cdots,n$ に対し,
$|z_i|$ をできるだけ大きくしたいから, x_i と $-\sum_{j=1}^{i-1} u_{ji} z_j$ を同符号にする.

$$\therefore \left.\begin{aligned} x_i &= -\mathrm{sgn}\left(\sum_{j=1}^{i-1} u_{ji} z_j\right) \\ z_i &= \frac{1}{u_{ii}}\left(x_i - \sum_{j=1}^{i-1} u_{ji} z_j\right) \end{aligned}\right\} \quad (i=1,\cdots,n).$$

3) 1)〜2) で得た z から,

$$L^T y = z$$

を後退代入で解いて y を求めれば,

$$\|A^{-1}\|_1 = \|(A^T)^{-1}\|_\infty \approx \|y\|_\infty,$$
$$\Downarrow$$
$$\kappa_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1.$$