連立一次方程式の解法3（反復法）

Jacobi法

$$
① \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

$a_{ii} \neq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ とする.

①は次と同値：

$$
x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j + b_i\right), \quad i = 1, 2, \cdots, n.
$$

$$\Downarrow$$

$k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して.

$$
\left[\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i\right), \quad (i = 1, 2, \cdots, n);\right.
$$

… Jacobi法

次の行列・ベクトルを導入する：

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = D + E + F
$$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11} & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & & O \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1\,n} \\ O & & & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}
$$

とおくと,

$$
x^{(k+1)} = -D^{-1}(E+F)x^{(k)} + D^{-1}b.
$$

Gauss-Seidel法

$k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，

$$\left[\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(-\underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)}}_{} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i\Big) \quad (i = 1, 2, \cdots, n);\right.$$

すでに計算の終わった成分は
新しい値に上書きしている．

$x^{(k)}, x^{(k+1)}$ ふたつのベクトルで記憶する必要がない

実際のプログラムでは，次のように書く；

$k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，

$$\left[\ x_i := \frac{1}{a_{ii}}\Big(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j + b_i\Big) \quad (i = 1, 2, \cdots, n);\right.$$

行列・ベクトル形式で書くと，

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(E x^{(k+1)} + F x^{(k)}) + D^{-1} b,$$

$$(D + E)x^{(k+1)} = -F x^{(k)} + b,$$

$$\therefore\ x^{(k+1)} = -(D+E)^{-1} F x^{(k)} + (D+E)^{-1} b.$$

SOR法

〈発想の原点〉 Jacobi法，Gauss-Seidel法はいずれも次の形である．

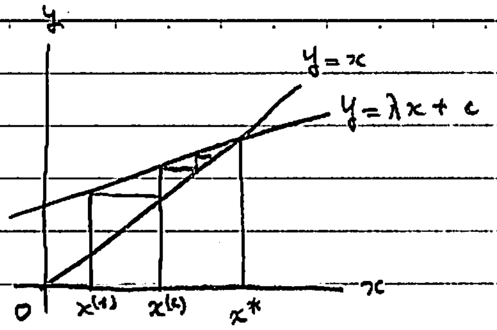
$$x^{(k+1)} = M x^{(k)} + c,$$

$$\begin{cases} \text{Jacobi法：} & M = -D^{-1}(E+F), \quad c = D^{-1} b \\ \text{G-S法：} & M = -(D+E)^{-1} F, \quad c = (D+E)^{-1} b \end{cases}$$

$x = Mx + c$ がもとの連立一次方程式

$x^{(k+1)}, x^{(k)}, c$ を M の固有ベクトルで考えれば，絶対値最大の固有値 λ に対応する成分は $x^{(k+1)} = \lambda x^{(k)} + c$ の形の反復である．

行列 M が"小さくて" $0 < \lambda < 1$ ならば，図のように $x^{(k)} \to x^*$（真の解）に収束していく．



$$\left(x^* = \frac{c}{1-\lambda}\right)$$

修正すべき量： $x^* - x^{(k)}$; —①

Gauss-Seidel 法での修正量

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = (\lambda x^{(k)} + c) - x^{(k)} = -(1-\lambda)x^{(k)} + c$$

[$c = (1-\lambda)x^*$ であるから]

$$= (1-\lambda)(x^* - x^{(k)}) \quad \text{—②}$$

$$\frac{①}{②} = \frac{1}{1-\lambda} > 1$$

⇓

G-S法での修正量を少し大きくすれば、収束が速くなるだろう。

〈SOR法（逐次過緩和法, successive overrelaxation method）〉

$k = 0, 1, 2, \cdots$ に対し

$i = 1, 2, \cdots, n$ に対し

$$x_i^{(GS)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i\right);$$

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega(x_i^{(GS)} - x_i^{(k)});$$

$\omega (> 1)$: パラメータ.

行列・ベクトル形式で書くと,

$$\begin{cases} x^{(GS)} = -D^{-1}E x^{(k+1)} - D^{-1}F x^{(k)} + D^{-1} b, \\ x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega (x^{(GS)} - x^{(k)}) \end{cases}$$

$x^{(GS)}$ を消去すると,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(-D^{-1}E x^{(k+1)} - D^{-1}F x^{(k)} + D^{-1}b - x^{(k)}),$$

$$(D + \omega E)x^{(k+1)} = (1-\omega)D x^{(k)} + \omega F x^{(k)} + \omega b,$$

$$\therefore\ x^{(k+1)} = (D+\omega E)^{-1}\{(1-\omega)D - \omega F\} x^{(k)} + \omega(D+\omega F)^{-1} b.$$